Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra and Geometrie
Prof. Dr. Wilderich Tuschmann
Martin Günther, M. Sc.

Schlüsselmomente der Geometrie **Sommer-Semester 2018**

Übungsblatt 10 **12.07.18**

Definition Eine glatte Funktion $u\colon (0,\infty)\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist eine Lösung der *Wärmeleitungsgleichung* auf $\mathbb{R}^n$, falls

$$\frac{\partial u(t,x^1,\dots x^n)}{\partial t} = \Delta u(t,x) := \sum_{i=0}^{n} \frac{\partial^2 u(t,x^1,\dots x^n)}{\partial {x^i}^2}$$

für alle $(t,x)\in U$ gilt.
Eine glatte Funktion $u\colon (0,\infty)\times T^n \to \mathbb{R}$ ist eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung auf dem Torus T^n, wenn die $\mathbb{Z}^n$-periodische Funktion $u\circ\pi$ eine Lösung auf $\mathbb{R}^n$ ist.
Dabei ist $\pi\colon \mathbb{R}^n \to T^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ die kanonische Projektion.

Aufgabe 1 *(Wärmeleitungsgleichung)*

a) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$\Phi\colon (0,\infty)\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \qquad (t,x)\mapsto \frac{1}{\sqrt{(4\pi t)^n}}\exp\left(-\frac{\|x\|^2}{4t}\right)$$

eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung auf $\mathbb{R}^n$ ist. Diese Funktion heißt *Wärmeleitungskern.*

b) Es seien $a<b$ zwei reelle Zahlen und u eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung auf $\mathbb{R}$, die $a\le u(t_0,x)\le b$ für alle $x\in\mathbb{R}$ zu einem festen Zeitpunkt $t_0\in(0,\infty)$ erfüllt. Zeigen Sie, dass dann

$$\frac{\partial u(t_0,x)}{\partial t} \ge 0 \text{ für } u(t_0,x)=a \quad \text{und} \quad \frac{\partial u(t_0,x)}{\partial t} \le 0 \text{ für } u(t_0,x)=b$$

gilt. Sie dürfen daher im Folgenden (ohne Beweis) davon ausgehen, dass in diesem Fall auch $a\le u(t,x)\le b$ für alle $t>t_0$ und $x\in\mathbb{R}$ gilt.

c) Jede glatte $\mathbb{Z}^n$-periodische Funktion hat nach Fourier die Darstellung

$$u(t,x) := \sum_{k\in\{0,1,2,\dots\}^n} a_k(t)\sin(2\pi\langle k,x\rangle) + b_k(t)\cos(2\pi\langle k,x\rangle)$$

für geeignete Funktionen $a_k, b_k\colon (0,\infty)\to\mathbb{R}$.

Zeigen Sie, dass u genau dann eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung ist, wenn

$$a_k(t) = a_{k,0}\exp(-(2\pi)^2\|k\|^2 t), \quad b_k(t) = b_{k,0}\exp(-(2\pi)^2\|k\|^2 t) \quad \text{für alle } k\in\{0,1,2,\dots\}^n$$

mit $a_{k,0}, b_{k,0}\in\mathbb{R}$ gilt und die Summe für alle $t\in(0,\infty), x\in\mathbb{R}^n$ konvergiert.

Zeigen Sie weiterhin, dass jede solche Lösung für $t\to\infty$ gegen eine konstante Funktion von x konvergiert.

Aufgabe 2 *(Curve-shortening flow)*

Eine Lösung des *kurvenverkürzenden Flusses (engl. curve-shortening flow)* ist eine Familie von geschlossenen Kurven

$$u_t\colon S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{R}^2, x \mapsto u_t(x)(u^1(t,x), u^2(t,x)),$$

die die Differentialgleichung

$$\frac{\partial u_t(x)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u_t(x)}{\partial s^2}$$

löst. Dabei ist $\frac{\partial}{\partial s}$ die Ableitung nach der Bogenlänge der Kurve u_t. Die rechte Seite der Gleichung ist ein Vektor, der senkrecht auf der Kurve steht und dessen Betrag die *geodätische Krümmung* der Kurve angibt.
Wir betrachten als Annäherung daran die einfachere Differentialgleichung

$$\frac{\partial u_t(x)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u_t(x)}{\partial x^2}$$

die genau dann von u_t gelöst wird, wenn $u^1(t,x)$ und $u^2(t,x)$ die Wärmeleitungsgleichung lösen.

a) Zeigen Sie, dass u_t für $t \to \infty$ gegen einen Punkt p konvergiert.

b) Zeigen Sie, dass es eine Funktion $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ gibt, sodass $u_\infty(x) := \lim_{t\to\infty} f(t)\cdot(u_t(x)-p)$ gegen eine Kurve der Länge 2π konvergiert. (Hinweis: Benutzen Sie die Ergebnisse von Aufgabe 1 d).)

c) Zeigen Sie: Falls u_∞ nach Bogenlänge parametrisiert ist, ist u_∞ der Einheitskreis in $\mathbb{R}^2$.

Aufgabe 3 *(Invariante Metriken auf der Heisenberggruppe)*

Die Matrixgruppe

$$G := \{\, M_{a,b,c} \mid a,b,c \in \mathbb{R} \,\} \qquad \text{mit } M_{a,b,c} = \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

wird *Heisenberggruppe* genannt.
Wir identifizieren die Tangentialräume von G mit der Lie-Algebra

$$T_g G := \mathfrak{g} := \{\, X_{x,y,z} \mid x,y,z \in \mathbb{R} \,\} \qquad \text{mit } X_{x,y,z} = \begin{pmatrix} 0 & x & z \\ 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Zeigen Sie, dass das Zentrum $Z(G)$ der Gruppe genau aus den Matrizen $M_{a,b,c} \in G$ mit $a = b = 0$ besteht.

b) Geben Sie alle symmetrischen Bilinearformen $\langle \cdot,\cdot \rangle$ auf $T_I G$ an, die

$$\langle MXM^{-1}, MYM^{-1} \rangle = \langle X, Y \rangle \qquad \text{für alle } M \in G,\ X, Y \in T_I G$$

erfüllen, und zeigen Sie, dass dies keine Skalarprodukte sind.

c) Zeigen Sie: Es gibt genau dann eine bi-invariante Metrik auf G, wenn es ein Skalarprodukt auf $T_I G$ gibt, das der obigen Bedingung genügt.

d) Bestimmen Sie einen Gruppenisomorphismus $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to G/Z(G)$ und geben Sie alle linksinvarianten Riemannschen Metriken auf G an, für die φ eine Isometrie bzgl. der Quotientenmetrik ist.