DIFFERENTIALGEOMETRIE UND SCHWARZE LÖCHER

WILDERICH TUSCHMANN

Aufgrund ihrer Fülle an Anwendungen und mannigfaltigen wechselseitigen Beziehungen stellen die mathematischen Disziplinen der Differentialgeometrie, Topologie und Geometrischen Analysis seit jeher einige der reichhaltigsten wie nützlichsten Teilgebiete der Mathematik dar. Exemplarisch für dieses fruchtbare Zusammenspiel und seine Anwendungen ist die Allgemeine Relativitätstheorie Albert Einsteins, in der die Gravitationskraft als Krümmung einer vierdimensionalen Raumzeit erklärt wird. Im Folgenden soll dies an einem differentialgeometrischen Resultat, der Riemannschen Penrose-Ungleichung, und dessen Implikationen für die Physik Schwarzer Löcher illustriert werden.

Heutzutage gilt es als gesicherte Erkenntnis, dass starke Gravitationsfelder nicht nur die Bewegung von Körpern im Raum beeinflussen, sondern auch die geometrischen Eigenschaften des Raumes selbst beträchtlich verändern können. Klassische Evidenzen für dieses Phänomen und die Gültigkeit der Allgemeinen Relativitätstheorie sind Gravitationsrotverschiebung, Lichtablenkung und Periheldrehung, neuere beispielsweise der indirekte Nachweis von Gravitationswellen anhand der Abnahme der Bahnperiode von Pulsaren in einem Doppelsternsystem. Auch moderne Navigationstechniken wie etwa das Globale Positionierungssystem GPS bestätigen die Allgemeine Relativitätstheorie.

Immer mehr konkrete Anhaltspunkte gibt es mittlerweile auch für die Existenz eines der derzeit wohl erstaunlichsten und mysteriösesten, da grundlegende Fragen über die Raumzeit-Struktur unseres Kosmos aufwerfenden astrophysikalischen Phänomene: dem der sogenannten *Schwarzen Löcher*. Darunter versteht man Bereiche der Raumzeit, vielleicht enstanden aus dem Gravitationskollaps eines Sterns oder Galaxienkerns, in denen die Gravitation so stark ist, dass aus ihnen nicht einmal Licht mehr entkommen kann.

Um überhaupt physikalische Vorhersagen über das Verhalten und die Eigenschaften solcher Objekte machen zu können, um diese dann mit auf experimentellem Wege gewonnenen Daten zu vergleichen und so zu einer konsistenten Theorie zu gelangen, ist es zunächst nötig, die geometrischen Implikationen der Einsteinschen Theorie systematischer und besser zu verstehen. Die Riemannsche Penrose-Ungleichung limitiert die geometrische Gestalt Schwarzer Löcher, indem sie in mathematisch strenger Form eine Relation zwischen der Oberfäche und der Gesamtmasse eines Schwarzen Loches etabliert, deren Gültigkeit von Physikern lange Zeit vermutet wurde.

Sehr vereinfacht ausgedrückt besagt dieses weiter unten ausführlicher behandelte mathematische Theorem, dass die Oberfläche - und damit insbesondere die Ausdehnung - eines Schwarzen Lochs durch eine neben allgemeinen astrophysikalischen Konstanten nur seine Masse involvierende Ungleichung abgeschätzt werden kann.

Werfen wir jedoch zunächst einen Blick auf den mathematischen und physikalischen Hintergrund:

Der mathematische Aufbau der Allgemeinen Relativitätstheorie basiert auf Konzepten der *Differentialgeometrie*, der mathematischen Theorie gekrümmter Räume.

Beim Stichwort "Geometrie" denkt ein jeder wohl zunächst an die aus der Schulzeit vertraute Euklidische Geometrie des Raumes und der Ebene, und erinnert sich dabei vielleicht auch an den Lehrsatz: "In einem Dreieck beträgt die Winkelsumme stets 180 Grad." Tatsächlich stellte die Euklidische Geometrie über Jahrtausende hinweg die einzige bekannte und akzeptierte Theorie der Längen- und Winkelmessung im uns umgebenden Raum dar. Erkenntnistheoretisch wurde ihr in den Schriften des Philosophen Immanuel Kant aufgrund dessen Vorstellungen über die Absolutheit und Unveränderlichkeit von Raum und Zeit (mit denen später selbst noch die Spezielle Relativitätstheorie zu kämpfen hatte) sogar eine Art universaler Gültigkeit zugesprochen.

Fast wie Bilderstürmerei musste es daher den Zeitgenossen erscheinen, als in den ersten Jahrzehnten des 19. Jahrhunderts Mathematiker wie der Russe N.I. Lobatschewski (1793-1856) und der Ungar J. Bolyai (1802-1860) bei ihren Studien zur axiomatischen Begründung der Euklidischen Geometrie entdeckten, dass man geometrische Theorien ersinnen konnte, die logisch genauso gültig und konsistent wie die Euklidische Geometrie waren. Diese Ergebnisse waren auch dem deutschen Mathematiker C.F. Gauß (1777-1855) zu diesem Zeitpunkt bereits wohlbekannt, aber nicht veröffentlicht worden, da er vielleicht vor dem damit einhergehenden Paradigmensturz zurückschreckte.

Gauß jedoch brachte in diese Entwicklung noch eine zweite wesentliche Idee ein: seine Vorstellung, dass es beim Studium der Geometrie von Flächen oder Flächenstücken im Raum nicht auf die genaue Art der Lage der Fläche im sie umgebenden Raum ankomme, sondern vielmehr auf die intrinsischen geometrischen Eigenschaften der Fäche selbst; so wie es bei der Bestimmung von Abständen zwischen Punkten der Erdoberfläche auch nicht wesentlich ist, in welcher genauen Position die Erde sich dabei auf ihrer Laufbahn um die Sonne befindet.

Diese Gedanken wurden später von dem deutschen Mathematiker G.F.B. Riemann (1826-1866) vereinheitlicht und weitreichend verallgemeinert: In seiner im Jahre 1854 gehaltenenen Göttinger Antrittsvorlesung "Über die Hypothesen, welche der Geometrie zugrunde liegen" propagierte er ein Programm, welches heute noch nicht abgeschlossen ist und einen der aktivsten mathematischen Forschungszweige darstellt: Das Studium und den Entwurf einer geometrischen Theorie abstrakter, d.h. nicht länger als natürlichen Teil eines sie umgebenden Raumes gedachter Objekte einer fixierten, aber beliebig großen Dimension, in denen ein lokaler Abstandsbegriff erklärt ist, der nicht mehr euklidisch zu sein braucht, sondern stattdessen sogar von Punkt zu Punkt frei variieren kann.

Verdeutlichen wir uns dies an einem sehr einfachen (und tatsächlich noch im Anschauungsraum "natürlich eingebetteten") Beispiel, der Geometrie der Oberfläche einer Vase (siehe Abbildung 1). Einem kleinen Käfer, der darauf herumkrabbelte, erschiene die Geometrie kleiner Bereiche der Oberfläche auf den ersten Blick nicht anders als die der Euklidischen Ebene. Begönne er nun jedoch damit, genaue Messungen anzustellen, so würde er feststellen, dass die Winkelsumme eines Dreieckes nicht mehr stets 180 Grad beträgt, sondern größer oder aber auch kleiner ausfallen kann, je nachdem, an welchem Punkt der Fläche sich unser Käfer befindet und dort Dreiecke vermisst.

Ein Maß für diese Abweichung von der Euklidischen Geometrie ist die sogenannte *Gaußsche Krümmung* der Fläche im jeweiligen Punkt. Ist diese positiv, so ist die Summe der Winkel von hinreichen kleinen Dreiecken um diesen Punkt größer als 180 Grad, bei negativer Krümmung jedoch kleiner (vergleiche Abbildung 1).

Abbildung 1: Negative und positive Krümmung auf einer etruskischen Amphore.

Heutzutage nennt man das von Riemann eingeführte abstrakte Konzept eines n-dimensionalen "gekrümmten" Raumobjektes eine *Mannigfaltkeit*, und deren geometrische Theorie "Differential-" oder, für speziellere Abstandsbegriffe, auch "Riemannsche" Geometrie. Neben zahlreichen wichtigen innermathematischen Anwendungen hat sich der Begriff der Mannigfaltigkeit als überaus hilfreich bei der Modellierung und Berechnung des Verhaltens vielfältiger Systeme erwiesen, deren kontinuierliche Zustände nichtlinearen Zwangsbedingungen unterliegen.

Somit ist also zunächst auch keinesfalls die Vorstellung zwingend, dass Mannigfaltigkeiten auch "echte" Teile unserer dreidimensionalen physikalischen Welt repräsentieren sollten. Doch im Jahre 1915, mit dem Erscheinen der Grundlagen der Einsteinschen Allgemeinen Relativitätstheorie, kam ihnen auf einmal auch eine neue physikalische Realität zu. Denn Einstein zeigte, dass die Gravitationskraft eine Veränderung der geometrischen Struktur des Raumes selbst bewirkt: Lokal bedingt Masse Krümmung, und diese bestimmt wiederum die Gestalt des Raumes. Die Gravitationsanziehung von Massen, welche frei fallende Körper sich aufeinander zubewegen lässt, wird dabei durch positive Krümmung repräsentiert. Anders ausgedrückt leben wir damit in einem gekrümmten Raum, oder, in der Sprache der Mathematiker: in einer Mannigfaltigkeit.

Wie können wir über diesen Raum und vor allem über seine globalen Eigenschaften nun nähere Informationen erlangen, wenn wir wie der Käfer auf der Vase doch nur die Möglichkeit besitzen, lokale Messungen vorzunehmen? Das Studium dieser Problematik ist eines der Hauptanliegen der Differentialgeometrie, und dort bekannt als

> DAS INTEGRATIONSPROBLEM: Wie bestimmt die lokale Geometrie einer Mannigfaltigkeit, also im wesentlichen die Krümmung, ihre globale Geometrie und Gestalt?

So besitzt beispielsweise eine Sphäre mit sehr kleinem Radius eine sehr starke positive, eine Sphäre mit großem Radius dagegen eine geringe positive Krümmung. Im allgemeinen verhält es sich so, dass Positivität der Krümmung die Fläche notwendig dazu zwingt, sich zu schließen. Eine positiv gekrümmte Mannigfaltigkeit kann sich also insbesondere nicht unendlich weit erstrecken, so wie eine Ebene dies vermag. Die (lokale) Eigenschaft positiver Krümmung bestimmt hier also einen wesentlichen globalen Aspekt, nämlich die Eigenschaft, beschränkt oder unbeschränkt zu sein. Dies lässt sich sogar quantitativ fassen:

Bezeichnet D den Durchmesser der Fläche oder Mannigfaltigkeit, und κ das positive Minimum ihrer Krümmung, so gilt die Beziehung

$$D \quad \leq \quad \pi/\sqrt{\kappa}\,.$$

Sphären mit hoher positiver Krümmung sind damit entsprechend klein, und umgekehrt. Eine derartige Beziehung bezeichnet man auch als *geometrische Ungleichung*, und die Entdeckung und Herleitung solcher Ungleichungen stellt ebenfalls eine wesentliche Aufgabe der Differentialgeometrie dar.

Die *Isoperimetrische Ungleichung* stellt ein weiteres Beispiel einer geometrischen Ungleichung dar: Nach ihr besitzt der Flächeninhalt A einer jeden Fäche, die ein bestimmtes, vorgegebenes Volumen V einschließt, mindestens die Größe

$$A \quad \geq \quad \sqrt[3]{36\,\pi\,V^2}.$$

Da der Flächeninhalt einer vollkommen runden Sphäre mit dem durch die Isoperimetrische Ungleichung gegebenen Mindestwert übereinstimmt, zeichnen sich also solche Sphären unter allen Flächen, die ein gegebenes Volumen einschließen, durch die Eigenschaft aus, das Minimum der Flächeninhalte aller solcher Flächen zu realisieren, und sind in diesem Sinne optimal (vergleiche Abbildung 2).

Auch unsere Naturgesetze sind oftmals so beschaffen, dass in ihnen die Tendenz wirkt, möglichst optimale und symmetrische Formen auszubilden, also gewissermaßen einem Variationsprinzip zu gehorchen. Im Falle der Isoperimetrischen Ungleichung ist dies ein Minimierungsprinzip und lässt sich beispielsweise an Experimenten mit Seifenblasen gut nachvollziehen: Unabhängig davon, welche Form die Seifenblase anfangs besitzt, unter dem Einfluss der auf sie wirkenden Kräfte wird sie sich, so man sie lässt, immer mehr der Gestalt einer möglichst runden Kugel annähern.

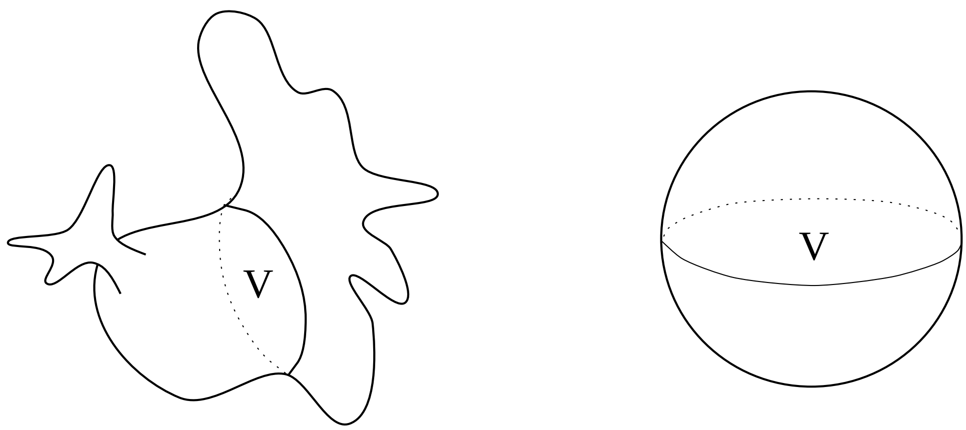

Abb. 2: Schlechte und optimale Realisierung der Isoperimetrischen Ungleichung.

Beim Gravitationskollaps eines sehr schweren Sterns oder Sternhaufens geschieht nun etwas sehr Ähnliches: Nach einer gewissen Zeit der Anpassung wird der Raum um die kollabierende Materie herum eine Gestalt annehmen, die einer "optimalen" Lösung der Einsteinschen Feldgleichungen entspricht. Diese wurde 1916 von dem deutschen Astronomen K. Schwarzschild (1873 - 1916) angegeben und beschreibt eine statische, hochsymmetrische Raumzeit, welche das Gravitationsfeld um einen nichtrotierenden isolierten Körper modelliert.

Im Gegensatz zum Fall eines nichtkollabierten Sterns ist das Massenzentrum einer solchen "Schwarzschild-Lösung" jedoch dem Auge des Betrachters verborgen, denn die Gravitation ist nach dem Kollaps dort so stark geworden, dass nicht einmal Lichtstrahlen mehr von dort entweichen können. Die Grenze zu diesem "Bereich ohne Wiederkehr", oder Schwarzen Loch, bildet den sogenannten *Ereignishorizont* (siehe Abbildung 3), und innerhalb eines solchen Schwarzen Lochs musste es eine Singularität von unendlicher Dichte und Raumzeitkrümmung geben, in der die üblichen Gesetze der Physik und Geometrie - und auch die Zeit selbst! - enden.

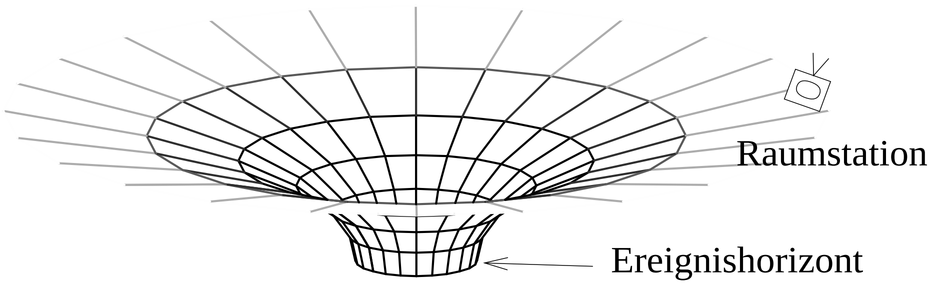

Abb. 3: Bereich der Raumzeit und Ereignishorizont um ein Schwarzes Loch.

Obwohl seit den sechziger Jahren neue astrophysikalische Beobachtungsmethoden wie die Röntgenastronomie weitere Hinweise auf Schwarze Löcher und Singularitäten der Raumzeit lieferten, blieb zunächst ungeklärt, ob und inwieweit ihre Existenz überhaupt mit der Allgemeinen Relativitätstheorie zu vereinbaren war. Die britischen Physiker S. Hawking und R. Penrose konnten unter Verwendung der positiven Krümmung der Raumzeit dann jedoch zeigen, dass in der Einsteinschen Theorie solche Singularitäten nicht selten, sondern eher sogar typisch sein mussten. Als Indikator für das Entstehen eines Schwarzen Lochs oder das Formen einer Singularität fungieren dabei in der Raumzeit die *Erscheinungshorizonte*, eine Art flächeninhaltsminimierende Flächenstücke oder Minimalflächen.

Da in einer Singularität auch unsere Fähigkeit endet, noch irgendwelche physikalischen Vorhersagen zu machen, stellte Penrose zur Umgehung dieses Vorhersagbarkeitsverlustes 1973 die *Hypothese der kosmischen Zensur* auf: Nach ihr gibt es keine "nackten" Singularitäten; stattdessen formen sich um eine Singularität stets, wie ein Feigenblatt, Objekte wie ein Schwarzes Loch, dessen Ereignishorizont dann die Singularität vor den Blicken außenstehender Beobachter abschirmt. Mit der Gültigkeit dieser Hypothese ließe sich zudem auch die Stabilität der Raumzeit in der Nähe einer Singularität erklären.

Die Penrose-Ungleichung

Auch als Test der Gültigkeit der Hypothese der kosmischen Zensur ersann Penrose daraufhin die nach ihm benannte Ungleichung. Sie hängt eng mit dem *Massenproblem* der Allgemeinen Relativitätstheorie zusammen:

Während die Krümmung die lokale Massendichte der Raumzeit determiniert, ist andererseits die totale Masse eines isolierten Systems durch seine Gravitationswirkung bestimmt, die es auf lange Distanzen ausübt. In diesem Kontext nimmt das oben behandelte Integrationsproblem dann folgende Gestalt an.

> Das Massenproblem: Wie bestimmt die lokale Massendichte die Gesamtmasse?

Im Rahmen der klassischen Newtonschen Mechanik besitzt dieses Problem eine einfache Lösung. Um die totale Masse m zu erhalten, addiert oder integriert man dazu einfach die lokale Massendichte ρ über den Raum auf:

$$m = \int_{\text{Raum}} \rho.$$

In der Einsteinschen Theorie gestaltet sich das Massenproblem jedoch weitaus schwieriger, da es hier keinerlei ausgezeichnetes Koordinatensystem mehr gibt, in dem man solche Integrationen vornehmen könnte. Ein nur auf den ersten Blick einfach erscheinender Spezialfall dieses Problems wurde 1979 mit dem *Satz von der Positivität der Masse* durch die Mathematiker R. Schoen und S.T. Yau gelöst. Sie zeigten: Ist die lokale Krümmung der Raumzeit positiv, so gilt dieses auch für die Gesamtmasse des Systems, und das System übt damit tatsächlich Gravitationsanziehung aus. Der Beweis des Satzes von der Positivität der Masse war nicht nur äußerst kompliziert, sondern führte auch zu vielfältigen Anwendungen in der konformen Geometrie und der Topologie positiver Skalarkrümmung.

Einer die Gültigkeit der Hypothese der kosmischen Zensur involvierenden physikalischen Argumentation folgend hatte Penrose bereits 1973 eine sehr präzise Version des Satzes von der Positivität der Masse propagiert, die

$$Penrose - Ungleichung: \quad m \quad \geq \quad \frac{c^2}{G}\sqrt{\frac{A}{16\pi}}\,.$$

Darin steht A für den Flächeninhalt einer Minimalfäche oder eines Erscheinungshorizontes im Raum, G für die Newtonsche Gravitationskonstante, und c für die Lichtgeschwindigkeit. Anschaulich bedeutet dies, dass die Oberfläche oder auch die Ausdehnung eines Schwarzen Lochs durch seine Gesamtmasse quantitativ beschränkt und kontrolliert wird. Beispielsweise besäße ein Schwarzes Loch von der Masse eines Apfels höchstens eine Oberfläche von gerade einmal 3×10^{-51} Quadratzentimetern.

Diese Ungleichung lässt sich als Analogon zur Isoperimetrischen Ungleichung auffassen und ist wie letztere von einer universellen Natur. Die optimale Realisierung der Penrose-Ungleichung ist gerade gegeben durch die hochsymmetrische Schwarzschild-Lösung, welche bei vorgegebener Fläche A die geringste Masse besitzt.

Gegenbeispiele zur Gültigkeit der Penrose-Ungleichung würden auf die Existenz nackter Singularitäten in der Raumzeit hindeuten und damit die Hypothese der kosmischen Zensur falsifizieren. Durch Arbeiten des Physikers Gibbons und der Mathematiker Bray und Herzlich gab es erste wesentliche Fortschritte bei der weiteren Verifizierung dieser für das weitere Verständnis unseres Kosmos so wichtigen Ungleichung, und im Jahr 1997 bewiesen die Mathematiker Huisken und Ilmanen die Penrose-Ungleichung für den wichtigen Fall der dreidimensionalen Riemannschen Mannigfaltigkeiten mit positiver Skalarkrümmung.

Der Beweis dieser "Riemannschen" Penrose-Ungleichung benutzt unterschiedlichste Methoden der Variationsrechnung, Differentialgeometrie und Mathematischen Relativitätstheorie. Eine zentrale Rolle spielt dabei eine von dem Physiker Geroch 1973 entdeckte Evolutionsgleichung für Flächen. Ihr gemäß evolviert eine Fläche am Erscheinungshorizont allmählich nach auswärts zu einer das ganze System umschließenden Sphäre, und zwar mit einer Geschwindigkeit, die umgekehrt proportional zu der mittleren Krümmung der Fläche ist. Während dieser Evolution wächst eine der Fläche assoziierte masseartige Größe monoton an. Der Anfangswert dieser Größe ist der Oberflächeninhalt der Fläche, und ihr Endwert nach der Evolution lässt sich mit der Gesamtmasse m des Systems vergleichen. Dabei sind verschiedene analytische Schwierigkeiten zu überwinden, da beispielsweise während der Evolution diese Flächen selbst singulär werden können.

Das Verständnis der geometrischen Implikationen und Konsequenzen der Einsteinschen Gleichungen bildet damit einen wesentlichen Schritt zur Ermöglichung und Überprüfung von physikalischen Vorhersagen über die Eigenschaften und Struktur unseres Universums. Geometrische Ungleichungen und Krümmungsflüsse werden dabei eine wichtige Rolle spielen, illustrieren sie doch schon jetzt beispielhaft, wie Methoden der modernen Mathematik fruchtbar dazu eingesetzt werden können, heuristisch gefundene Prinzipien der Physik zu verifizieren und zu erhellen!

(Dieser Aufsatz entstand auf der Grundlage von gemeinsamen Diskussionen mit Tom Ilmanen und meiner Konzeption für dessen Beitrag "Die Penrose-Ungleichung: Differentialgeometrie und Schwarze Loecher im Kosmos" im Jahrbuch 1998 der Max-Planck–Gesellschaft, die für die hier vorliegende Version leicht revidiert und ergänzt wurde.)