1. Übungsblatt
Aufgaben mit Lösungen

Aufgabe 1: Berechnen Sie folgende Summen:

$$\text{(a)} \quad \sum_{m=5}^{9}(m^2-m), \qquad \text{(b)} \quad \sum_{n=4}^{7}\binom{n}{n-2}, \qquad \text{(c)} \quad \sum_{n=4}^{27} 4\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Lösung 1: (a) Wir trennen die Summe auf und setzen die Zahlen ein:

$$\begin{aligned}\sum_{m=5}^{9}(m^2-m) &= \sum_{m=5}^{9} m^2 - \sum_{m=5}^{9} m \\ &= (25+36+49+64+81)-(5+6+7+8+9) \\ &= 255-35 = 220.\end{aligned}$$

(b) Zuerst setzen wir die Definition des Binomialkoeffizienten ein. Dann kürzen wir den Bruch und setzen schließlich die Werte ein:

$$\begin{aligned}\sum_{n=4}^{7}\binom{n}{n-2} &= \sum_{n=4}^{7}\frac{n!}{(n-2)!\,(n-(n-2))!} = \sum_{n=4}^{7}\frac{n(n-1)}{2!} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{n=4}^{7}(n^2-n) = \tfrac{1}{2}(16-4+25-5+36-6+49-7) = \frac{104}{2} = 52\end{aligned}$$

(c) Wir ziehen die 4 aus der Summe und verschieben den Index ($n' = n-4$). Danach Spalten wir das Produkt $(\frac{1}{2})^{n'+4}$ auf und ziehen den Faktor $(\frac{1}{2})^4$ nach außen. Dann verwenden wir die geometrische Summenformel. Zum Schluss bringen wir den Ausdruck auf eine Nenner.

$$\begin{aligned}\sum_{n=4}^{27} 4\left(\frac{1}{2}\right)^n &= 4\sum_{n'=0}^{23}\left(\frac{1}{2}\right)^{n'+4} = 4\sum_{n=0}^{23}\left(\frac{1}{2}\right)^n\left(\frac{1}{2}\right)^4 \\ &= \frac{4}{16}\,\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{24}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{2}{4}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{24}\right) \\ &= \frac{2^{24}-1}{2^{25}}\end{aligned}$$

Aufgabe 2: (a) Verschieben Sie die Indizes so, dass der folgende Ausdruck mit einem Summenzeichen geschrieben werden kann.

$$\sum_{\nu=2}^{23}(\nu-1)^2 + \sum_{\mu=-2}^{19} 2(\mu+3) + \sum_{k=10}^{31} 1$$

Berechnen Sie dann die Summe. Hierbei dürfen Sie Beispiel 1.9 aus der Vorlesung verwenden.
(b) Zeigen Sie mit Hilfe einer geeigneten Indextransformation, dass für $a, b \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$(a-b)\sum_{\nu=0}^{n} a^\nu b^{n-\nu} = a^{n+1} - b^{n+1}.$$

Lösung 2: (a) Wir wenden die Indextransformationen $n = \nu - 1$ bzw. $n = \mu + 3$ und $n = k - 9$ an. Dann können wir den Ausdruck als eine Summe schreiben.

$$\sum_{\nu=2}^{23}(\nu-1)^2 + \sum_{\mu=-2}^{19} 2(\mu+3) + \sum_{k=10}^{31} 1 = \sum_{n=1}^{22} n^2 + \sum_{n=1}^{22} 2n + \sum_{n=1}^{22} 1 = \sum_{n=1}^{22}(n^2+2n+1).$$

Wir erkennen die erste binomische Formel. Durch eine weitere Indexverschiebung und elementaren Rechenoperationen erhalten wir

$$\sum_{n=1}^{22}(n^2+2n+1)=\sum_{n=1}^{22}(n+1)^2=\sum_{n=2}^{23}n^2=\left(\sum_{n=1}^{23}n^2\right)-1\overbrace{=}^{\text{Bsp 1.9}}\frac{1}{6}\cdot 23\cdot 24\cdot 47-1=4323$$

(b) Wir multiplizieren aus. Den letzten Summanden der ersten Summe und den ersten Summanden der zweiten Summe schreiben wir explizit auf:

$$(a-b)\sum_{\nu=0}^{n}a^\nu b^{n-\nu}=\sum_{\nu=0}^{n}a^{\nu+1}b^{n-\nu}-\sum_{\nu=0}^{n}a^\nu b^{n-\nu+1}=a^{n+1}+\sum_{\nu=0}^{n-1}a^{\nu+1}b^{n-\nu}-\sum_{\nu=1}^{n}a^\nu b^{n-\nu+1}-b^{n+1}$$

Nun verschieben wir den Index der zweiten Summe $\nu'=\nu-1$ bzw. $\nu=\nu'+1$:

$$\sum_{\nu=1}^{n}a^\nu b^{n-\nu+1}=\sum_{\nu'=0}^{n-1}a^{\nu'+1}b^{n-\nu'}$$

Setzen wir dies oben ein, so sehen wir, dass sich die Summen aufheben. Wir erhalten die Behauptung: $(a-b)\sum_{\nu=0}^{n}a^\nu b^{n-\nu}=a^{n+1}-b^{n+1}$

Aufgabe 3: Berechnen Sie

$$\text{(a)}\quad \sum_{k=0}^{1}\sum_{l=2}^{4}\frac{1}{(k+l)^2},\qquad \text{(b)}\quad \sum_{\nu=1}^{4}\sum_{k=1}^{\nu}\nu(\nu-k)$$

Lösung 3: (a)

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{1}\sum_{l=2}^{4}\frac{1}{(k+l)^2}&=\sum_{k=0}^{1}\left(\frac{1}{(k+2)^2}+\frac{1}{(k+3)^2}+\frac{1}{(k+4)^2}\right)\\&=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}\;+\;\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}=\frac{1}{4}+\frac{2}{9}+\frac{2}{16}+\frac{1}{25}=\frac{1147}{1800}\end{aligned}$$

(b) Wir ziehen den Faktor ν aus der inneren Summe. Dann transformieren wir den Index durch $l=\nu-k$ (bzw. $k=\nu-l$). Als letzten Schritt verwenden wir die Summenformel aus der Vorlesung und setzen die Zahlen ein:

$$\begin{aligned}\sum_{\nu=1}^{4}\sum_{k=1}^{\nu}\nu(\nu-k)&=\sum_{\nu=1}^{4}\nu\sum_{k=1}^{\nu}(\nu-k)=\sum_{\nu=1}^{4}\nu\overbrace{\sum_{l=0}^{\nu-1}l}^{=\frac{\nu(\nu-1)}{2}}=\sum_{\nu=1}^{4}\nu\frac{\nu(\nu-1)}{2}=\frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{4}\nu^2(\nu-1)\\&=\frac{1}{2}(0+4+18+48)=35.\end{aligned}$$

Aufgabe 4:
(a) Berechnen Sie die Summe

$$\sum_{n=3}^{5}\frac{\binom{n}{3}}{n!}.$$

(b) Beweisen Sie die folgende Rechenregel für den Binomialkoeffizienten. Für $n\geq m\geq r\geq 0$ gilt

$$\binom{n}{m}\cdot\binom{m}{r}=\binom{n}{r}\cdot\binom{n-r}{m-r}.$$

Lösung 4:

(a)

$$\sum_{n=3}^{5} \frac{\binom{n}{3}}{n!} = \sum_{n=3}^{5} \frac{n!}{3!(n-3)!n!} = \sum_{n=3}^{5} \frac{1}{3!(n-3)!} = \frac{1}{3!0!} + \frac{1}{3!1!} + \frac{1}{3!2!} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{5}{12}$$

(b) Wir setzen die Definition des Binomialkoeffizienten ein. Dann können wir $m!$ kürzen.

$$\binom{n}{m} \cdot \binom{m}{r} = \frac{n!}{m!(n-m)!} \cdot \frac{m!}{r!(m-r)!} = \frac{n!}{r!(n-m)!(m-r)!}$$

Dann schrieben wir künstlich $n - m = n - r + r - m = (n - r) - (m - r)$ und erhalten wieder die gewünschte Form:

$$\frac{n!}{r!(n-m)!(m-r)!} = \frac{n!}{r!(n-r)!} \cdot \frac{(n-r)!}{((n-r)-(m-r))!(m-r)!} = \binom{n}{r} \cdot \binom{n-r}{m-r}.$$

Aufgabe 5: Bestimmen Sie alle Lösungen der folgenden linearen Gleichungssysteme:

$$\text{(a)}\quad \begin{array}{rrrcl} -3x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 3 \\ -2x_1 & -2x_2 & +x_3 & = & 1 \\ -2x_1 & -x_2 & +x_3 & = & 2 \end{array} \qquad \text{(b)}\quad \begin{array}{rrrcl} x_1 & +2x_2 & +4x_3 & = & 3 \\ 4x_1 & +7x_2 & +x_3 & = & 2 \\ -2x_1 & -3x_2 & +7x_3 & = & 4 \end{array}$$

Lösung 5: Bemerkung: Mit (α), (β) und (γ) bezeichnen wir hier Pivotelement-Zeilen der Koeffizientenmatrix. (a)

$$\begin{array}{rrr|rl} -3 & 1 & \boxed{1} & 3 & (\alpha) \\ -2 & -2 & 1 & 1 & -1\cdot(\alpha) \\ -2 & -1 & 1 & 2 & -1\cdot(\alpha) \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{rrr|rl} -3 & 1 & \mathbf{1} & 3 & \\ 1 & -3 & 0 & -2 & -1\cdot(\beta) \\ \boxed{1} & -2 & 0 & -1 & (\beta) \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{rrr|r} -3 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ \mathbf{1} & -2 & 0 & -1 \end{array}$$

Wir lesen aus der 2. Zeile ab $x_2 = 1$. Aus der letzten Zeile erhalten wir weiter $x_1 - 2x_2 = -1$, setzen für $x_2 = 1$ ein und erhalten $x_1 = 1$. Aus der ersten Zeile erhalten wir $-3x_1 + x_2 + x_3 = 3$, setzen für $x_2 = 1, x_1 = 1$ ein und erhalten $x_3 = 5$. Damit haben wir eine eindeutige Lösung $(x_1, x_2, x_3) = (1, 1, 5)$.
(b)

$$\begin{array}{rrr|rl} \boxed{1} & 2 & 4 & 3 & (\alpha) \\ 4 & 7 & 1 & 2 & -4\cdot(\alpha) \\ -2 & -3 & 7 & 4 & +2\cdot(\alpha) \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{rrr|rl} \mathbf{1} & 2 & 4 & 3 & \\ 0 & -1 & -15 & -10 & +1\cdot(\beta) \\ 0 & \boxed{1} & 15 & 10 & (\beta) \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 15 & 10 \end{array}$$

Wir erkennen, dass x_3 eine freie Variable ist. Die Lösung ist in Abhängigkeit dieser Variable anzugeben. Die dritte Zeile liefert $x_2 = 10 - 15x_3$. Das setzen wir in die erste Zeile ein und erhalten $x_1 + 20 - 30x_3 + 4x_3 = 3$ oder äquivalent $x_1 = -17 + 26x_3$. Die Lösungsmenge ist

$$\left\{ (-17 + 26x_3, 10 - 15x_3, x_3)^\top : x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$