Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
Sommersemester 2014
Dr. Manuel Amann
Dipl.-Math. Werner Thumann

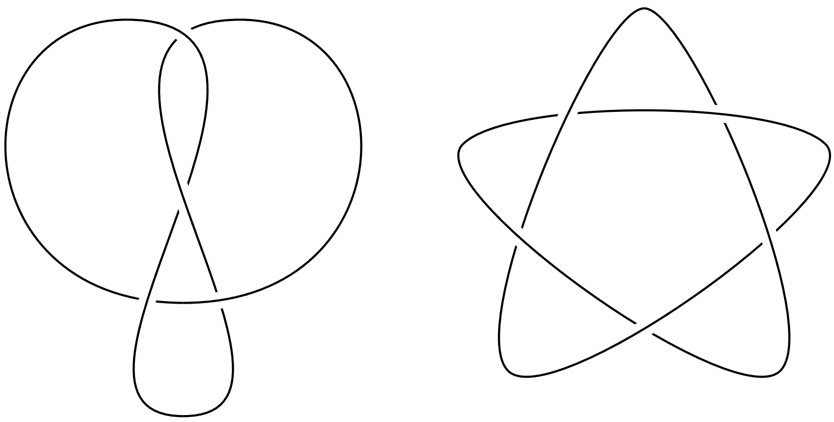
Übungen zu

Knotentheorie

Blatt 1

Aufgabe 1. Betrachten Sie folgende Anleitung zum Binden eines einfachen Windsor-Knotens.

Zeichnen Sie ein möglichst einfaches Knotendiagramm (ähnlich wie unten), welches die Verknotung der Krawatte darstellt, wenn man nach dem Binden die beiden Enden zusammenheftet. Welches der beiden Diagramme beschreibt den einfachen Windsor-Knoten auch?



Aufgabe 2. Seien (X_1, d_1) und (X_2, d_2) metrische Räume. Auf $X_1 \times X_2$ sei die sup-Metrik durch

$$d_{\sup}\big((x_1,x_2),(y_1,y_2)\big) := \sup\{d_1(x_1,y_1), d_2(x_2,y_2)\}$$

definiert.

a) Zeigen Sie, dass d_{sup} tatsächlich eine Metrik ist.

b) Folgern Sie aus der Dreiecksungleichung die Vierecksungleichung für metrische Räume (X,d):

$$|d(x,y)-d(a,b)| \leq d(x,a)+d(y,b)$$

c) Zeigen Sie, dass für einen metrischen Raum (X,d) die Abbildung

$$d\colon X \times X \to \mathbb{R} \qquad (x,y) \mapsto d(x,y)$$

bezüglich der sup-Metrik auf $X \times X$ stetig ist.

Aufgabe 3. Nach Vorlesung nennen wir eine Teilmenge U eines metrischen Raumes (X,d) *offen*, falls es um jeden Punkt $x \in U$ einen Ball gibt, der ganz in U enthalten ist. Weiter ist $A \subseteq X$ *abgeschlossen*, falls $X \setminus A$ offen ist.

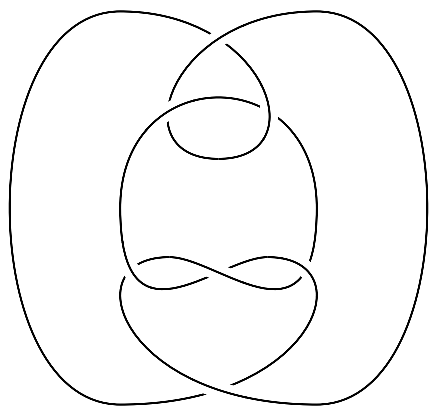
a) Zeigen Sie, dass eine Abbildung $f\colon X \to Y$ von metrischen Räumen genau dann stetig ist, wenn sie folgenstetig ist, d.h. für jede Folge (x_n) in X, welche gegen $x \in X$ konvergiert, konvergiert die Bildfolge $(f(x_n))$ gegen $f(x)$.

b) Zeigen Sie, dass eine Abbildung $f\colon X \to Y$ von metrischen Räumen genau dann stetig ist, wenn Urbilder offener Teilmengen wieder offen sind.

c) Schließen Sie daraus, dass eine Abbildung $f\colon X \to Y$ von metrischen Räumen genau dann stetig ist, wenn Urbilder abgeschlossener Teilmengen wieder abgeschlossen sind.

d) Eine Abbildung $f\colon X \to Y$ von metrischen Räumen heißt *offen* (bzw. *abgeschlossen*) falls $f(U)$ offen ist für jedes offene $U \subseteq X$ (bzw. falls $f(A)$ abgeschlossen ist für jedes abgeschlossene $A \subseteq X$). Wir betrachten $(0,1) \subseteq \mathbb{R}$ als metrischen Raum mit der eingeschränkten Euklidischen Metrik. Ist die Inklusion $i\colon (0,1) \to \mathbb{R}$ offen? Ist sie abgeschlossen?

Aufgabe 4. Betrachten Sie folgendes Knotendiagramm



Stellen Sie durch eine Folge von Knotendiagrammen eine Verformung dar, welche den obigen Knoten entknotet.