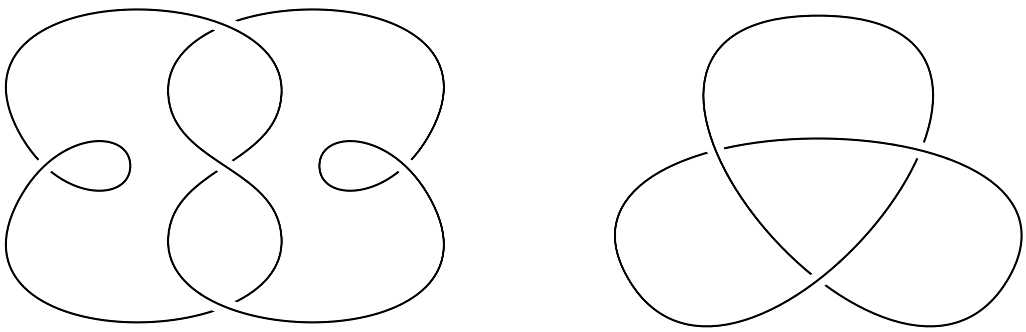
Karlsruher Institut für Technologie

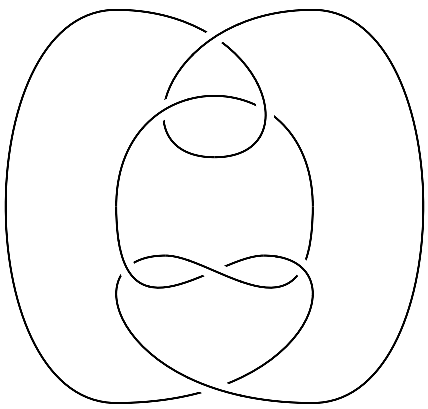
Institut für Algebra und Geometrie
Sommersemester 2014
Dr. Manuel Amann
Dipl.-Math. Werner Thumann

Übungen zu
Knotentheorie
Blatt 3

Aufgabe 1. Zeigen Sie durch Reidemeisterbewegungen die Äquivalenz der folgenden zwei Knoten:



Aufgabe 2. Entknoten Sie den Knoten aus Aufgabe 4 auf Blatt 1 durch Reidemeisterbewegungen.



Aufgabe 3. In dieser Aufgabe wollen wir sehen, wie eine bestimmte Reidemeisterbewegung entsteht, wenn wir eine Kurve auf verschiedene Hyperebenen des $\mathbb{R}^3$ projizieren. Betrachten Sie hierzu die Kurve

$$\omega\colon [0,1] \to \mathbb{R}^3 \qquad t \mapsto \left(\cos 2\pi t, \sin 2\pi t, t\right)$$

und für $\tau \in [0,1]$ den Vektor

$$v_\tau := \left(0, \cos\frac{\pi}{2}\tau, -\sin\frac{\pi}{2}\tau\right)$$

a) Sei $V_\tau \subseteq \mathbb{R}^3$ die zum Vektor v_τ orthogonale Hyperebene und $u_1^\tau = (1,0,0)$. Ergänzen Sie u_1^τ zu einer Orthonormalbasis (u_1^τ, u_2^τ) von V_τ und stellen Sie die Orthogonalprojektion $P_\tau \colon \mathbb{R}^3 \to V_\tau$ bezüglich der Standardbasis (e_1, e_2, e_3) des $\mathbb{R}^3$ und der Basis (u_1^τ, u_2^τ) als Matrix dar.

b) Für welchen Wert τ ist die projizierte Kurve

$$\omega_\tau \colon [0,1] \to V_\tau \cong \mathbb{R}^2 \qquad t \mapsto P_\tau\big(\omega(t)\big)$$

an der Stelle $t = \frac{1}{2}$ singulär, d.h. die Ableitung verschwindet an der Stelle $t = \frac{1}{2}$?

c) Skizzieren Sie für ein paar ausgewählte τ (z.B. für $\tau = 0, \frac{1}{10}, \frac{1}{5}, 1$) die projizierte Kurve ω_τ. Welchen Typ von Reidemeisterbewegung sehen Sie?

Aufgabe 4. Sei $\mathbb{S}^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ die Einheitssphäre.

a) Ist die Abbildung $\mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$ induziert durch Spiegelung an der x-Achse orientierungserhaltend?

b) Ist die Abbildung $\mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$ induziert durch Spiegelung an der x-y-Ebene orientierungserhaltend?

Begründen Sie ähnlich wie im Beispiel aus der Vorlesung.

c) Zeichnen Sie ein Knotendiagramm des an einer Hyperebene im $\mathbb{R}^3$ gespiegelten Kleeblattknotens.