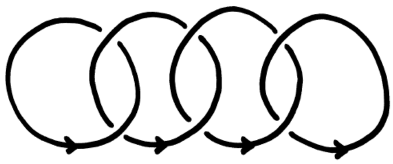
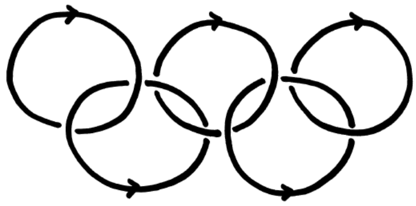
Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
Sommersemester 2014
Dr. Manuel Amann
Dipl.-Math. Werner Thumann

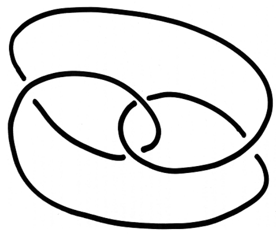
Übungen zu
Knotentheorie
Blatt 9

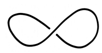
Aufgabe 1. Berechnen Sie das Jones-Polynom folgender klassischer Verschlingungen.

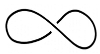



Aufgabe 2.

a) Zeigen Sie, dass das Brückenzahl minimierende Knotendiagramm des Kleeblattknotens nicht adäquat ist.



b) Ist das Knotendiagramm  plus-adäquat? Ist es minus-adäquat?

Beantworten Sie die gleichen Fragen für das Diagramm .

Aufgabe 3. Sei D ein Diagramm einer Verschlingung mit n Kreuzungsstellen. Zeigen Sie die folgende Formel aus der Vorlesung:

$$\langle D\rangle = \sum_{\substack{s \text{ Zustand} \\ \text{von } D}} a^{\sum_{i=1}^{n} s(i)} \left(-a^{-2}-a^{2}\right)^{|sD|-1}$$

Aufgabe 4. Sei $\Bbbk$ ein Körper. Wir definieren das *Tensorprodukt* $V \otimes_{\Bbbk} W$ zweier $\Bbbk$-Vektorräume wie folgt: Sei $F(V\times W)$ der freie $\Bbbk$-Vektorraum erzeugt durch die Menge $V\times W$, d.h. die Elemente $(v,w)\in V\times W$ bilden eine Basis von $F(V\times W)$. Sei R der Untervektorraum von $F(V\times W)$, welcher von den Vektoren der Form

$$\begin{gathered}(v_1,w)+(v_2,w)-(v_1+v_2,w)\\(v,w_1)+(v,w_2)-(v,w_1+w_2)\\\lambda(v,w)-(\lambda v,w)\\\lambda(v,w)-(v,\lambda w)\end{gathered}$$

mit $v, v_1, v_2 \in V$, $w, w_1, w_2 \in W$ und $\lambda \in \Bbbk$ erzeugt wird. Wir definieren $V \otimes_\Bbbk W := F(V \times W)/R$. Sei weiter $\eta_{V,W} : V \times W \to V \otimes_\Bbbk W$ die $\Bbbk$-bilineare Abbildung, die ein Paar $(v,w) \in V \times W$ auf die zugehörige Restklasse in $F(V \times W)/R$ abbildet. Man schreibt hierfür auch $v \otimes w := \eta_{V,W}(v,w)$.

a) Zeigen Sie die universelle Eigenschaft des Tensorprodukts: Für jeden $\Bbbk$-Vektorraum A und jede $\Bbbk$-bilineare Abbildung $\psi\colon V \times W \to A$ gibt es genau eine $\Bbbk$-lineare Abbildung $\alpha\colon V \otimes_\Bbbk W \to A$ mit $\alpha \circ \eta_{V,W} = \psi$.

b) Zeigen Sie $V \otimes_\Bbbk \Bbbk \cong V$ als $\Bbbk$-Vektorräume.

c) Seien $(v_1, \dots, v_n)$ eine Basis von V und $(w_1, \dots, w_m)$ eine Basis von W. Zeigen Sie, dass dann die Vektoren $v_i \otimes w_j$ für $i = 1, \dots, n$ und $j = 1, \dots, m$ eine Basis von $V \otimes_\Bbbk W$ bilden.

d) Was ergibt sich hieraus für die Dimension von $V \otimes_\Bbbk W$? Folgern Sie $\mathbb{C} \otimes_\mathbb{C} \mathbb{C} \ncong \mathbb{C} \otimes_\mathbb{R} \mathbb{C}$ als $\mathbb{R}$-Vektorräume.