Karlsruher Institut für Technologie

Fakultät für Mathematik
Institut für Algebra und Geometrie
Wintersemester 2012/13
5. November 2013

Übungen zu
Lineare Algebra und Analytische Geometrie I
Blatt 3

Aufgabe 1

a) Welche der folgenden Abbildungen sind injektiv, welche surjektiv?

$$f\colon\ \mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N},\ (m,n)\mapsto m+n-1$$
$$g\colon\ \mathbb{Z}\to\mathbb{Z},\ x\mapsto 2x$$
$$h\colon\ \mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{Z},\ (m,n)\mapsto m^2-n^2$$

b) Zeigen Sie, dass die folgende Abbildung bijektiv ist, und geben Sie eine Umkehrabbildung an:

$$f\colon\ \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}\times\mathbb{Z},\ (x,y)\mapsto(2x+y,\ x+y)$$

Aufgabe 2

a) Auf der Menge $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ sei $\sim$ die Relation, die gegeben ist durch

$$(x_1,y_1)\sim(x_2,y_2)\Leftrightarrow x_1^2+y_1^2=x_2^2+y_2^2.$$

Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist, und skizzieren Sie die Äquivalenzklasse von $(-1,\ 2)$.

b) Auf der Menge $\mathbb{Z}\times\mathbb{N}$ sei $\sim$ diejenige Relation, die gegeben ist durch

$$(z_1,n_1)\sim(z_2,n_2)\Leftrightarrow z_1n_2=z_2n_1.$$

Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist, und geben Sie eine bijektive Abbildung von der Menge der Äquivalenzklassen $M:=\{[(z,n)]\mid(z,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}\}$ nach $\mathbb{Q}$ an.

Aufgabe 3 Es sei das folgende kommutative Diagramm von Mengen gegeben:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"'] & Y \arrow[d, "\beta"] \\ A \arrow[r, "g"'] & B \end{tikzcd}$$

Die Abbildungen α und β seien Bijektionen. Zeige:

a) f ist genau dann injektiv, wenn g injektiv ist.

b) f ist genau dann surjektiv, wenn g surjektiv ist.

Aufgabe 4 Sei X eine Menge und sei $f: X\to\mathcal{P}(X)$ eine Abbildung. Zeigen Sie, dass f nicht surjektiv ist.

Abgabe der Lösungen bis zum 12. November 2013 um 12 Uhr in den entsprechenden **gelben Briefkasten Ihres Tutoriums bei den Seminarräumen Z1 und Z2 im Zähringerhaus, Gebäude 01.85** (Eingang neben der mathematischen Bibliothek). Bitte **heften Sie Ihre Abgabe ordentlich zusammen** und **vermerken Sie Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer** auf jedem Blatt. Jede Aufgabe wird mit maximal 4 Punkten bewertet.