Karlsruher Institut für Technologie

Fakultät für Mathematik
Institut für Algebra und Geometrie
Wintersemester 2013/14
12. November 2013

Übungen zu
Lineare Algebra und Analytische Geometrie I
Blatt 4

Aufgabe 1

a) Auf der Menge $\mathbb{R}$ sei die durch

$$x \sim_{\mathbb{Z}} y \iff x - y \in \mathbb{Z}$$

definierte Äquivalenzrelation gegeben. Mittels $\sim_{\mathbb{Z}}$ definiert man auf der Menge $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}$ durch

$$(x, y) \sim (x', y') \iff y \equiv y' \bmod 2 \text{ und } x \sim_{\mathbb{Z}} x'$$

eine Äquivalenzrelation $\sim$. Zeigen Sie:

$$(\mathbb{R} \times \mathbb{Z})/\sim \; \to \; \mathbb{R}/\sim_{\mathbb{Z}} \; , \; [(x, y)] \mapsto [(-1)^y \cdot x]$$

ist eine wohldefinierte Abbildung.

b) Finden Sie eine Bijektion $\mathbb{R}/\sim_{\mathbb{Z}} \; \to \; [0, 1)$.

Aufgabe 2 Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe.

a) Sei $a \in G$. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$c_a : G \to G \, , \, g \mapsto a \cdot g \cdot a^{-1}$$

ein Gruppenhomomorphismus ist. Zeigen Sie weiter, dass c_a sogar ein Automorphismus von G ist.

b) Zeigen Sie: Die Abbildung

$$c : G \to \mathrm{Aut}(G) \, , \, g \mapsto c_g$$

ist ein Gruppenhomomorphismus [1].

c) Zeigen Sie: Der Homomorphismus c ist trivial (d.h. es gilt $c_g = \mathrm{id}_G$ für alle $g \in G$) genau dann, wenn G abelsch ist.

Aufgabe 3 Betrachten Sie für $i = 1, ..., 6$ die folgenden Abbildungen $f_i : \mathbb{R}\backslash\{0, 1\} \to \mathbb{R}\backslash\{0, 1\}$:

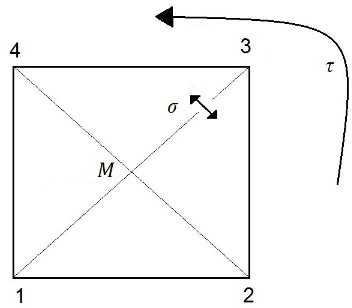
$$f_1(x) := x \, , \qquad f_2(x) := 1 - x \, , \qquad f_3(x) := 1/x$$
$$f_4(x) := \frac{1}{1 - x} \, , \qquad f_5(x) := \frac{x}{x - 1} \, , \qquad f_6(x) := \frac{x - 1}{x} .$$

Zeigen Sie: Die Komposition von Abbildungen definiert eine Verknüpfung auf $G := \{f_1, ..., f_6\}$, und G ist mit dieser Verknüpfung eine Gruppe.

[1] Die Menge $\mathrm{Aut}(G)$ der Automorphismen von G ist eine Gruppe mit der Komposition von Automorphismen als Verknüpfung.

Aufgabe 4
Sei $E \subset \mathbb{R}^2$ die Menge der Ecken eines Quadrates mit Mittelpunkt M. Sei weiter

- τ eine Selbstabbildung von E, die durch Drehung um $90\,^\circ$ gegen den Uhrzeigersinn gegeben ist.
- σ eine Selbstabbildung von E, die durch Spiegelung an einer Diagonalen gegeben ist.



Durch Nummerierung der Ecken können wir σ und τ als Permutationen in S_4 auffassen.

a) Zeigen Sie: $\sigma^2 = \text{id}$, $\tau^4 = \text{id}$ und $\tau \circ \sigma \circ \tau = \sigma$.

b) Bestimmen Sie die von σ und τ erzeugte Untergruppe von S_4, indem Sie ihre Verknüpfungstafel angeben.

Abgabe der Lösungen bis zum 19. November 2013 um 12 Uhr in den entsprechenden **gelben Briefkasten Ihres Tutoriums bei den Seminarräumen Z1 und Z2 im Zähringerhaus, Gebäude 01.85** (Eingang neben der mathematischen Bibliothek). Bitte **heften Sie Ihre Abgabe ordentlich zusammen** und **vermerken Sie Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer** auf jedem Blatt. Jede Aufgabe wird mit maximal 4 Punkten bewertet.