Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
Wintersemester 2013/14
Dr. Manuel Amann
Dr. Johannes Riesterer

Übungen zu
Rationale Homotopietheorie
Blatt 1

Aufgabe 1. (Tensorprodukt) Es seien A, B Module über einem kommutativen Ring R mit 1. Wir definieren das Tensorprodukt $A \otimes_R B$ als den Quotienten des von den Paaren $(a,b) \in A \times B$ frei erzeugten $\mathbb{Z}$-Moduls nach den Relationen $(a_1+a_2,b) = (a_1,b)+(a_2,b)$, $(a,b_1+b_2) = (a,b_1)+(a,b_2)$, $(a\cdot r,b) = (a,b\cdot r)$ für $a \in A, b \in B, r \in R$.

Zeigen Sie:

- Die Abbildung $p\colon\ A \times B \to A \otimes_R B$ gegeben durch $(a,b) \mapsto a \otimes_R b$ ist R-bilinear. Falls B kommutativer Ring mit 1 ist, so ist $A \otimes_R B$ ein B-Modul.
- $\mathbb{Z}_n \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = 0$ $(n \geq 2)$, $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$ als $\mathbb{R}$-Modul, aber es gilt immer $A \otimes_R R \cong A$.
- $A \otimes_R B$ hat die folgende universelle Eigenschaft: Zu jeder bilinearen Abbildung $f\colon\ A \times B \to S$ existiert eine eindeutige Abbildung $\tilde{f}\colon\ A \otimes_R B \to S$ mit $\tilde{f} \circ p = f$.

Aufgabe 2. (exakte Sequenz) Es seien M_1, M_2, M_3 Module über einem kommutativen Ring mit 1 zusammen mit Abbildungen $f\colon\ M_1 \to M_2$, $g\colon\ M_2 \to M_3$. Wir verwenden die *exakte Sequenz* $M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3$ als Kurzschreibweise für $\ker g = \operatorname{im} f$.

- Zeigen Sie, dass die Sequenz $0 \to M_1 \xrightarrow{f} M_2 \to 0$ genau dann exakt ist, wenn f ein Isomorphismus ist.
- Bestimmen Sie alle $n \geq 2$ und $\mathbb{Z}$-lineare Abbildungen f, g so, dass
$$0 \to \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{f} \mathbb{Z}_n \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{g} \mathbb{Z}_5 \to 0$$
exakt ist.
- Beweisen Sie: Für endlich-dimensionale $\mathbb{k}$-Vektorräume M_1, M_2, M_3 mit Vektorraumabbildungen f, g in $0 \to M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3 \to 0$ bestimmen M_1 und M_3 zusammen M_2 bis auf Isomorphie. Gilt dies auch für beliebige Module?
- Zeigen Sie: Ist die Sequenz $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ von abelschen Gruppen exakt, so auch
$$A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \xrightarrow{f} B \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \xrightarrow{g} C \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}.$$
Gilt auch die umgekehrte Implikation?

Aufgabe 3. Zeigen Sie: Die Fundamentalgruppe eines H-Raumes ist abelsch.
Hinweis: Zeigen Sie, dass $f \cdot g$ sowohl zu $f * g$, als auch zu $g * f$ homotop ist, indem Sie $(f*e)\cdot(e*g)$ mit $(f\cdot e)*(e\cdot g)$ und $(e*f)\cdot(g*e)$ mit $(e\cdot g)*(f\cdot e)$ in Verbindung bringen.

Aufgabe 4. Die beiden oberen Ecken eines Bildes sollen so miteinander durch eine Schnur, die ihrerseits zwecks Befestigung des Bildes an der Wand um *zwei* Nägel geführt wird, verbunden werden, dass das folgende gilt: Wann immer ein Nagel aus der Wand gezogen wird, fällt das Bild zu Boden.
Hinweis: Überlegen Sie sich, dass wir hierfür eine nullhomologe, aber nicht nullhomotope Kurve in $\mathbb{R}^2 \setminus \{pt_1, pt_2\}$ suchen.

Abgabe der Bearbeitungen zu diesem Blatt am Montag, den 28.10.2013, in der Vorlesung.