Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
Wintersemester 2013/14
Dr. Manuel Amann
Dr. Johannes Riesterer

Übungen zu
Rationale Homotopietheorie
Blatt 2

Aufgabe 1. Zeigen Sie, dass eine stetige Abbildung $f\colon \mathbb{D}^n \to \mathbb{D}^n$ einen Fixpunkt hat.
Hinweis: Nehmen Sie das Gegenteil an und verwenden Sie die Stetigkeit der Funktion g, die einem Strahl von $f(x)$ nach x seinen Schnittpunkt mit $\partial\mathbb{D}^n$ zuordnet. Betrachten Sie $g|_{\partial\mathbb{D}^n}$.

Aufgabe 2. Beweisen Sie:

(a) Die Lokalisierung R_I eines kommutativen Ringes R mit 1 in einem Ideal $I \lhd R$ ist ein lokaler Ring, d.h. R_I besitzt nur das eine maximale Ideal I_I.

(b) Die Lokalisierung $S^{-1}M$ eines R-Moduls M erfüllt $S^{-1}M \cong M \otimes_R S^{-1}R$ als $S^{-1}R$-Module.

Bestimmen Sie die Lokalisierung der Ringe $\mathbb{R}[x]$ in (0) und $\mathbb{R}[x,y]/(x^3)$ in (y).

Aufgabe 3. Beschreiben Sie die CW-Komplexe $X_{(p)}$ für $p \in \{0,2,3\}$ für $X = \mathbb{S}^n \cup_\varphi \mathbb{D}^{n+1}$ $(n \geq 2)$ und eine Abbildung $\varphi\colon \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ vom Abbildungsgrad $\deg\varphi \in \{1,2,3,4,5,6\}$.

Aufgabe 4. Es sei $n \geq 2$. Wie wir gesehen haben, gilt

$$[\mathbb{S}^n, *; X_\mathbb{Q}, *] = \pi_n(X) \otimes \mathbb{Q}$$

für einen einfach zusammenhängenden topologischen Raum X. Wieso gilt auch

$$[\mathbb{S}^n_\mathbb{Q}, *; X_\mathbb{Q}, *] = \pi_n(X) \otimes \mathbb{Q} \quad ?$$

Wann gilt ebenso

$$[\mathbb{S}^n_\mathbb{Q}, *; X, *] = \pi_n(X) \otimes \mathbb{Q}$$

für einen einfach zusammenhängenden endlich CW-Komplex X?
Hinweis: Verwenden Sie ein Resultat von Serre, das besagt, dass die Homotopiegruppen eines einfach zusammenhängenden endlichen CW-Komplexes endlich erzeugt sind als abelsche Gruppen. Nutzen Sie weiter die konkrete CW-Struktur des „Teleskops“ $\mathbb{S}^n_\mathbb{Q}$ und betten Sie $\mathbb{S}^n$ hierein kanonisch als „unterste Scheibe“ ein.