Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
Wintersemester 2013/14
Dr. Manuel Amann
Dr. Johannes Riesterer

Übungen zu
Rationale Homotopietheorie
Blatt 3

Aufgabe 1. Zeigen Sie:

- Die freie kommutative Algebra ΛV über dem Körper $\mathbb{k}$ mit $\operatorname{char}\mathbb{k} = 0$ ist ein Produkt der symmetrischen Algebra über den Elementen geraden Grades V^{even} und der äußeren Algebra über V^{odd}, d.h. $\Lambda V = \mathbb{k}[V^{\text{even}}] \otimes_{\mathbb{k}} \operatorname{Ext}[V^{\text{odd}}]$.
- Es existiert ein kanonischer Isomorphismus $\Lambda(V \oplus W) \cong \Lambda V \otimes_{\mathbb{k}} \Lambda W$.
- Gilt $V = V^1$ und ist $\dim V < \infty$, so folgt $(\Lambda V)^k = \Lambda^k V$ und $\dim(\Lambda V)^k = \binom{\dim V}{k}$. Formulieren Sie analoge Aussagen für $V = V^2$.

Aufgabe 2. Es sei $(A, \mathrm{d}) := (\Lambda\langle x, y, v, w\rangle, \mathrm{d})$ eine Sullivan Algebra mit $\deg x = \deg y = d_1 \geq 2$ und $\deg v = \deg w = d_2 \geq 2$. Bestimmen Sie

- alle d_1, d_2 so, dass $H(A, \mathrm{d})$ nicht endlich dimensional sein kann.
- alle d_1, d_2 und d so, dass (A, d) sich als relative minimale Sullivan Algebra, die nicht minimal als Sullivan Algebra ist, schreiben läßt.

Existieren Wahlen für d_1, d_2 und d, so dass

- $\dim \pi^*(A, \mathrm{d}) = 1$ gilt?
- $\dim \pi^*(A, \mathrm{d}) = 2$ und $H(A, \mathrm{d})$ endlich dimensional ist?

Finden Sie jeweils d_1, d_2, d so, dass $\dim H(A, \mathrm{d}) \in \{4, 16, 100\}$.

Aufgabe 3. Finden Sie (nicht-triviale) paarweise nicht isomorphe Kokettenalgebren (A, d), (B, d), (C, d) so, dass eine schwache Äquivalenz

$$(A, \mathrm{d}) \xleftarrow{\simeq} (B, \mathrm{d}) \xrightarrow{\simeq} (C, \mathrm{d})$$

besteht, aber weder ein Quasi-isomorphismus $(A, \mathrm{d}) \xrightarrow{\simeq} (C, \mathrm{d})$ noch ein Quasi-isomorphismus $(C, \mathrm{d}) \xrightarrow{\simeq} (A, \mathrm{d})$ existiert.

Aufgabe 4. Finden Sie eine freie kommutative differentielle graduierte Algebra $(\Lambda V, \mathrm{d})$, die keine Sullivan Algebra ist.
Hinweis: Ein solches Beispiel existiert schon für $V = V^1$.

Zeigen Sie umgekehrt, dass jede freie kommutative differentielle graduierte Algebra mit $V = V^{\geq 2}$, die die Minimalitätsbedigung erfüllt, schon eine minimale Sullivan Algebra ist.