Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
Wintersemester 2013/14
Dr. Manuel Amann
Dr. Johannes Riesterer

Übungen zu
Rationale Homotopietheorie
Blatt 4

Aufgabe 1. Klassifizieren Sie alle $(\Lambda\langle x,y,z\rangle, \mathrm{d})$ mit $\deg x = 4, \deg y = 7, \deg z = 8$ bis auf schwache Äquivalenz. Bestimmen Sie jeweils die Homotopiegruppen und beschreiben Sie die sich ergebende Kohomologiestruktur.

Aufgabe 2.

- Beweisen Sie, dass das Tensor-Produkt zweier (minimaler) Sullivan Algebren wieder eine (minimale) Sullivan Algebra ist.
- Wir konstruieren die kommutative differentielle graduierte Algebra $(E(A),\partial) := (\Lambda\langle A \oplus \partial A\rangle, \partial)$ für eine kommutative differentielle graduierte Algebra (A,d). Dabei ist ∂A das isomorphe Bild von A, eine formale Kopie von A, unter dem Differential ∂. D.h. $\partial|_A$ ist injektiv und $\partial|_{\partial A} = 0$. Zeigen Sie, dass $(E(A),\partial)$ kontrahierbar ist und ein surjektiver Morphismus differentieller graduierter Algebren
$$\varphi\colon\ (E(A),\partial) \to (A,\mathrm{d})$$
existiert.

Aufgabe 3. Finden Sie für jedes $n \geq 1$ eine endlich dimensionale kommutative graduierte Algebra H, die als Algebra von genau n (nicht-trivialen) Elementen erzeugt wird und die die folgende Eigenschaft besitzt: Je zwei minimale Sullivan Algebren $(\Lambda V,\mathrm{d}_1)$ und $(\Lambda W,\mathrm{d}_2)$ mit
$$H(\Lambda V,\mathrm{d}_1) \cong H(\Lambda W,\mathrm{d}_2) \cong H$$
sind isomorph.
Finden Sie eine weitere solche Algebra H', die nicht isomorph zu H ist.
Hinweis: Sie können sich z.B. auf Algebren H, H' konzentrieren, die in geraden Graden konzentriert sind.

Aufgabe 4. Finden Sie eine einfach zusammenhängende minimale Sullivan Algebra $(\Lambda V,\mathrm{d})$ mit den folgenden Eigenschaften:

- V is endlich dimensional.
- $H(\Lambda V,\mathrm{d})$ ist endlich dimensional.
- $\pi^*(H(\Lambda V,\mathrm{d}),0)$ (definiert als $\pi^*(\Lambda W,\mathrm{d})$ eines Sullivan Modells $(\Lambda W,\mathrm{d})$ von $(H(\Lambda W,\mathrm{d}),0)$) ist unendlich dimensional.

Folgern Sie insbesondere: $H := H(\Lambda V,\mathrm{d})$ hat nicht die Eigenschaft aus Aufgabe 3.
Hinweis: Ein solches Beispiel existiert schon für $\dim V = \dim V^{odd} = 3$.

Abgabe der Bearbeitungen zu diesem Blatt am Montag, den 18.11.2013, in der Vorlesung.
http://www.math.kit.edu/iag7/lehre/rht132013w/