Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
Wintersemester 2013/14
Dr. Manuel Amann
Dr. Johannes Riesterer

Übungen zu
Rationale Homotopietheorie
Blatt 5

Aufgabe 1. Es sei (A, d) die Kokettenalgebra, die erzeugt wird von Elementen a, b, c, x, y in den respektiven Graden $2, 2, 2, 3, 5$. Die Differentiale sind bestimmt durch $\mathrm{d}a = \mathrm{d}b = \mathrm{d}c = \mathrm{d}y = 0$, $\mathrm{d}x = ab$. Es gelte weiter die Relation $bc = 0$. Wieso ist (A, d) keine Sullivan Algebra? Bestimmen Sie ein minimales Sullivan Model von (A, d) und ein minimales Sullivan Modell $(\Lambda V, \mathrm{d})$ von $(H(A, \mathrm{d}), 0)$ bis Grad 7, d.h. den Raum $V^{\leq 7}$ und die zugehörigen Differentiale.

Aufgabe 2.

- Es sei $(\Lambda V, \mathrm{d})$ eine Sullivan Algebra. Zeigen Sie, dass der lineare Anteil des Differentials $\mathrm{d}_0 \colon V \to V$ wieder ein Differential ist und dass $(\Lambda V, \mathrm{d})$ genau dann minimal ist, wenn $\mathrm{d}_0 = 0$ gilt.
- Es sei $(A, \mathrm{d}) := (\Lambda V \otimes \Lambda W, \mathrm{d})$ eine relative Sullivan Algebra über der Sullivan Algebra $(\Lambda W, \mathrm{d})$ Zeigen Sie, dass (A, d) wieder eine Sullivan Algebra ist.
  Hinweis: Betrachten Sie die Filtrierung $(V \oplus W)(0) := 0, (V \oplus W)(k+1) := \{w \in V \oplus W \mid \mathrm{d}w \in \Lambda(V \oplus W)(k)\}$.

Aufgabe 3. Es sei $(\Lambda W \otimes \Lambda V, \mathrm{d})$ eine minimale relative Sullivan Algebra über der minimalen Sullivan Algebra $(\Lambda W, \mathrm{d})$. Zeigen Sie, dass die Sequenz[1]

$$\ldots \to \pi^{i-1}(V, \bar{\mathrm{d}}) \xrightarrow{\mathrm{d}_0} \pi^i(\Lambda W, \mathrm{d}) \to \pi^i(\Lambda W \otimes \Lambda V, \mathrm{d}) \to \pi^i(\Lambda V, \bar{\mathrm{d}}) \xrightarrow{\mathrm{d}_0} \pi^{i+1}(\Lambda W, \mathrm{d}) \to \pi^{i+1}(\Lambda W \otimes \Lambda V, \mathrm{d}) \to \ldots$$

sich mit

$$\ldots \xrightarrow{Qp} V^{i-1} \xrightarrow{\mathrm{d}_0} W^i \xrightarrow{Qj} H^i(W \oplus V, \mathrm{d}_0) \xrightarrow{Qp} V^i \xrightarrow{\mathrm{d}_0} W^{i+1} \xrightarrow{Qj} H^{i+1}(V \oplus W, \mathrm{d}_0) \to \ldots$$

identifiziert und dass diese exakt ist. (In der zweiten Sequenz steht d_0 für den Linearteil des Differentials d.)

Aufgabe 4. Zeigen Sie, dass jede Sullivan Algebra $(\Lambda \tilde{V}, \tilde{\mathrm{d}})$ mit $\tilde{V}^1 = 0$ isomorph ist zu dem Produkt $(\Lambda V, \mathrm{d}) \otimes (\tilde{C}, \mathrm{d})$ einer minimalen Sullivan Algebra $(\Lambda V, \mathrm{d})$ und einer kontrahierbaren Kokettenalgebra $(\tilde{C}, \mathrm{d})$.
Hinweis: Adaptieren Sie das Vorgehen im Algorithmus zur Konstruktion eines minimalen Modells. Spalten Sie hierzu $\tilde{V}^k$ geeignet auf in $\tilde{V}^k = C^k \oplus V^k$, konstruieren Sie in jedem Schritt das Differential d mit Hilfe von $\tilde{\mathrm{d}}_0$, konstruieren Sie schrittweise einen Automorphismus von $(\tilde{V}, \tilde{\mathrm{d}})$, der es erlaubt, anzunehmen, dass ΛV abgeschlossen ist unter d und bestimmen Sie den gesuchten Isomorphismus m_k.

Abgabe der Bearbeitungen zu diesem Blatt am Montag, den 25.11.2013, in der Vorlesung.
http://www.math.kit.edu/iag7/lehre/rht132013w/

[1] Beachten Sie Aufgabe 2, die es rechtfertigt, von den Homotopiegruppen von $(\Lambda W \otimes \Lambda V, \mathrm{d})$ zu sprechen.