Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
Wintersemester 2013/14
Dr. Manuel Amann
Dr. Johannes Riesterer

Übungen zu

Rationale Homotopietheorie

Blatt 7

Aufgabe 1. Etablieren Sie das „Retrakt-Axiom" **MC3** von Modellkategorien für die Kategorie $\mathscr{CCHA}$ der Kokettenalgebren (über $\mathbb{Q}$).

Aufgabe 2. Es sei $(\Lambda V, \mathrm{d}) \otimes (\Lambda(V' \oplus V''), \mathrm{d})$ das Produkt einer Sullivan Algebra und einer kontrahierbaren mit $V \cong (V')^{+1}$, d.h. $V^{n+1} = (V')^n$ für $n \geq 0$, $V'' = V$ und $\mathrm{d}V' = V''$. Wir definieren eine lineare Abbildung von Grad -1 auf $V \oplus V' \oplus V''$ durch $s(v) = v'$, $s(v') = s(v'') = 0$ und erweitern diese zu einer Derivation auf $(\Lambda(V \oplus V' \oplus V''), \mathrm{d})$. Zeigen Sie:

- $\theta = s\mathrm{d} + \mathrm{d}s$ is eine Derivation von Grad 0, und es existiert für jedes Element u ein $p \in \mathbb{N}$ mit $\theta^p(u) = 0$.
- Die Potenzreihe $e^\theta = \mathrm{id} + \theta + \frac{\theta^2}{2} + \frac{\theta^3}{6} + \ldots$ definiert einen Automorphismus von $\Lambda(V \oplus V' \oplus V'')$.

Zwei Abbildungen $f, g\colon (\Lambda V, \mathrm{d}) \to (B, \mathrm{d})$ heißen *links-homotop*, wenn ein $H\colon (\Lambda(V \oplus V' \oplus V''), \mathrm{d}) \to (B, \mathrm{d})$ existiert mit $f = H \circ i$ (mit der Inklusion i) und $g = H \circ e^\theta$. Beweisen Sie, dass Linkshomotopie eine Äquivalenzrelation ist. [1]

Aufgabe 3. Beweisen Sie: Eine Abbildung von Sullivan Algebren $f\colon (\Lambda V, \mathrm{d}) \to (\Lambda W, \mathrm{d})$ ist ein Quasi-Isomorphismus genau dann, wenn

$$\pi^*(f)\colon \pi^*(\Lambda V, \mathrm{d}) \to \pi^*(\Lambda W, \mathrm{d})$$

ein Isomorphismus ist.

Abgabe der Bearbeitungen zu diesem Blatt am Montag, den 9.12.2013, in der Vorlesung.
http://www.math.kit.edu/iag7/lehre/rht132013w/

[1] Linkshomotopie ist äquivalent zu Homotopie, womit diese auch eine Äquivalenzrelation darstellt.