Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
Wintersemester 2013/14
Dr. Manuel Amann
Dr. Johannes Riesterer

Übungen zu
Rationale Homotopietheorie
Blatt 8

Aufgabe 1. Zeigen Sie, dass die Sullivan Algebren $(\Lambda\langle a,b,x,y\rangle,\mathrm{d})$ mit $\deg a=\deg b=2$, $\deg x=\deg y=3$ und

- $\mathrm{d}x=a^2$, $\mathrm{d}y=b^2$
- $\mathrm{d}x=a^2+b^2$, $\mathrm{d}y=ab$

sich jeweils durch eine Mannigfaltigkeit realisieren lassen.

Beweisen Sie das gleiche für $(\Lambda\langle a,b,x,y,z\rangle,\mathrm{d})$ mit $\deg a=\deg b=2$, $\deg x=\deg y=\deg z=3$ und $\mathrm{d}a=\mathrm{d}y=b$, $\mathrm{d}x=a^2$, $\mathrm{d}y=ab$, $\mathrm{d}z=b^2$.

Aufgabe 2. Zeigen Sie, dass die auf $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ definierte Differentialform $\omega=\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$ eine geschlossene, nicht exakte Form $\omega|_{\mathbb{S}^1}$ auf $\mathbb{S}^1\subseteq\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ liefert.
Hinweis: Verwenden Sie für die Nicht-Exaktheit, dass $\omega|_{\mathbb{S}^1}=\varphi|_{\mathbb{S}^1}$ mit der auf $\mathbb{R}^2$ definierten Form $\varphi=x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x$ und benutzen Sie den Satz von Stokes, um zu zeigen, dass $\int_{\mathbb{S}^1}\omega\neq 0$.

Aufgabe 3. Zeigen Sie, dass $\mathrm{A_{PL}}(*)=\mathbb{Q}$ – dabei bezeichnet „$*$" den topologischen Raum mit genau einem Punkt. Bestimmen Sie $\mathrm{A_{PL}}(\Delta[1])$.[1]

Aufgabe 4. Etablieren Sie das „Hochhebungs-Axiom" **MC4** von Modellkategorien für die Kategorie $\mathscr{CCHA}$ der Kokettenalgebren (über $\mathbb{Q}$).
Hinweis: Um die Linkshochhebungseigenschaft einer azyklischen Kofaserung $(A,\mathrm{d})\to(B,\mathrm{d})$ zu zeigen, erweitern Sie das Lifting-Diagramm um das Retrakt-Diagramm, faktorisieren Sie die Kofaserung f als

$$f\colon\ (A,\mathrm{d})\xrightarrow{f}(\operatorname{im}f,\mathrm{d})\otimes(E(A),\delta)\xrightarrow{j}(B,\mathrm{d})$$

über zwei Quasi-Isomorphismen mit surjektivem j (!), und wenden Sie das „Lifting Lemma" für azyklische Faserungen an. Überlegen Sie sich im Folgenden, dass ein Lift auf $\operatorname{im}f$ praktisch schon gegeben und ein Hochhebungsproblem für eine kontrahierbare Sullivan-Algebra entlang einer surjektiven Abbildung stets trivial lösbar ist.

Abgabe der Bearbeitungen zu diesem Blatt am Montag, den 16.12.2013, in der Vorlesung.
http://www.math.kit.edu/iag7/lehre/rht132013w/

[1] Vergleichen Sie mit der Definition von Homotopie.