Institut für Algebra und Geometrie
Wintersemester 2013/14
Dr. Manuel Amann
Dr. Johannes Riesterer

Übungen zu
Rationale Homotopietheorie
Blatt 10

Aufgabe 1. Bestimmen Sie minimales Sullivan-Modell, Kohomologiealgebra und rationale Homotopiegruppen des Biquotienten[1]

$$\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \backslash \mathbf{SO}(4) \times \mathbf{SO}(4) / \mathbf{SO}(3) \times \mathbf{SO}(3)$$

Hier ist die Inklusion der $\mathbf{SO}(3)$-Faktoren jeweils kanonisch blockweise in die entsprechenden $\mathbf{SO}(4)$-Faktoren gegeben. Die Inklusion des Torus $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ in $\mathbf{SO}(4) \times \mathbf{SO}(4)$ is gegeben durch

$$(v,w) \mapsto (\operatorname{diag}(v,w), \operatorname{diag}(vw^{-1}, vw))$$

Bestimmen Sie Signatur und erste Pontryagin Klasse.

Aufgabe 2. Klassifizieren Sie alle rationalen Homotopietypen von 5-dimensionalen rational elliptischen einfach zusammenhängenden Räumen. Finden Sie realisierende Mannigfaltigkeiten.

Machen Sie das gleiche für 2-zusammenhängende rational elliptische 6-Mannigfaltigkeiten.

Aufgabe 3. Verwenden Sie die Mayer–Vietoris Sequenz, um die Betti Zahlen $b_i(M_1\#M_2) = \dim H_i(M_1\#M_2;\mathbb{Q}) = \dim H^i(M_1\#M_2;\mathbb{Q})$ einer zusammenhängenden Summe $M_1\#M_2$ zweier kompakter, geschlossener, orientierter Mannigfaltigkeiten M_1 und M_2 zu berechnen. Verwenden Sie dieses Resultat zusammen mit den Eigenschaften elliptischer Räume, um zu zeigen, dass $\mathbb{C}\mathbf{P}^2\#\mathbb{C}\mathbf{P}^2\#\mathbb{C}\mathbf{P}^2$ eine kompakte rational hyperbolische Mannigfaltigkeit ist.[2]

Aufgabe 4. Bestimmen Sie cat $\mathbb{S}^n$ ($n \geq 2$) sowie die Lusternik-Schnirelmann Kategorie des minimalen Modells von $\mathbb{S}^n$. Geben Sie eine obere Schranke für cat $\mathbb{C}\mathbf{P}^n$ (sowie eine untere mittels der Cup-Länge) an, und berechnen Sie wieder die Kategorie eines minimalen Modells.

Abgabe der Bearbeitungen zu diesem Blatt am Montag, den 13.1.2014, in der Vorlesung.
http://www.math.kit.edu/iag7/lehre/rht132013w/

[1] Dieser Raum ist $\mathbb{C}\mathbf{P}^2\#\mathbb{C}\mathbf{P}^2$.
[2] Vergleichen Sie mit Aufgabe 1.