

Seminar Gruppen mit polynomialem Wachstum Wintersemester 2017/2018

Der polynomiale Wachstumssatz von Gromov besagt: Eine Gruppe von polynomialem Wachstum besitzt eine Untergruppe von endlichem Index, die nilpotent ist.

Ziel des Seminars ist es, einen Beweis dieses Meilensteins der geometrischen Gruppentheorie vorzustellen. In allen Beweisen versucht man, eine lineare Darstellung der gegebenen Gruppe mit polynomialem Wachstum zu konstruieren, die ein unendliches Bild hat. Wie man diese lineare Darstellung findet, unterscheidet die Beweise. Im klassischen Beweis von Gromov [5] betrachtet man einen Reskalierungslimes der Gruppe mit ihrer Wortmetrik und konstruiert daraus einen zusammenhängenden Raum, der sich als Liegruppe herausstellt. Der Beweis von Ozawa [7] dagegen, der auch auf früheren Ideen von Shalom [8] beruht, ist von Ideen der Ergodentheorie, insbesondere von dem Konzept der Entropie, inspiriert. Wir folgen dem Ansatz von Ozawa und Shalom.

Es ist empfehlenswert, sich vor Beginn des Seminars Abschnitt 3.4 des Skripts *Geometric Group Theory* von Herrn Sauer durchzulesen.

Planen Sie 75-80 min maximale Redezeit ein. Der Rest wird für Zwischenfragen benötigt. Sie sollten zu Ihrem Vortrag ein Handout von 1-2 Seiten (das keine Beweise enthält!) verteilen. Kommen Sie spätestens 2 Wochen vor Ihrem Vortrag zu Herrn Schrödl, um Ihren Vortrag zu besprechen. Sie sollten zu diesem Zeitpunkt schon eine konkrete Vorstellung von Ihrem Vortrag haben.

Programm

Vortrag 1 (19.10.17). **Sprecher:** Roman Sauer

Struktur des Beweises nach Ozawa und Shalom. Wie impliziert Eigenschaft H_{FD} den polynomialen Wachstumssatz?

Literatur: [8]

Vortrag 2 (02.11.17). **Sprecher:** Stefan Lais

Theorem 4 in [10]: Endlich erzeugte Untergruppen einer kompakten linearen Liegruppe von polynomialem Wachstum sind virtuell abelsch. Der Beweis beruht auf Theorem 7 (Jordans Satz),

das ebenfalls bewiesen werden soll. Bei Interesse kann der Beweis mit dem Originalbeweis in [2] verglichen werden (ist im Vortrag wahrscheinlich nicht zeitlich machbar).

Literatur: [10]

Vortrag 3 (16.11.17). **Sprecher:** Stephan Simonis

Beweis von Theorem 5. Dies ist die Reduktion des polynomialen Wachstumssatzes auf den Fall, dass die Gruppe – nach Übergang zu einer Untergruppe von endlichem Index – einen Epimorphismus nach \mathbb{Z} besitzt.

Literatur: [10]

Vortrag 4 (23.11.17). **Sprecher:** Steven Grothnes

Diskussion der ersten gewöhnlichen und reduzierten Gruppenkohomologie mit Koeffizienten in unitären Darstellungen nach [8, Abschnitte 2.3 und 2.4]. Rückverweis von Remark 2.4.5 in [8] auf die entsprechende Stelle im ersten Vortrag. Diskutiere Seite 2 in [7]: Warum kann die reduzierte Kohomologie durch harmonische Zykel repräsentiert werden?

Literatur: [7, 8]

Vortrag 5 (30.11.17). **Sprecher:** David Degen

Hilbert-Schmidt Operatoren. Weakly Mixing [1, Proposition A.1.12]. Lemma auf S.3 in [7]. Mit nachfolgenden Sprecher abklären, wo die genaue Trennlinie in [7] ist.

Literatur: [1, 7]

Vortrag 6 (07.12.17). **Sprecher:** Florian Kunick

Fortsetzung und Abschluss von Ozawas Beweis, dass H_{FD} aus polynomialen Wachstum folgt.

Literatur: [7]

Vortrag 7 (14.12.17). **Sprecher:** Jonas Labonte

Was ist ein Ultrafilter? Definition eines Ultraprodukts von Banachräumen.

Literatur: [3, Appendix A; 4, 7.1 und 7.2]

Vortrag 8 (21.12.17). **Sprecher:** Miriam Beddig

Kurzeinführung in Kazhdans Eigenschaft (T): Was ist (T)? Warum ist eine amenable Gruppe mit Eigenschaft (T) endlich? Siehe [1, Kapitel 1.1]. Danach Beweis des Satzes von Mok und Korevaar-Schoen nach [7, Appendix A].

Literatur: [1, 7]

Literatur

- [1] Bachir Bekka, Pierre de la Harpe, and Alain Valette, *Kazhdan's property (T)*, New Mathematical Monographs, vol. 11, Cambridge University Press, Cambridge, 2008.
- [2] Emmanuel Breuillard, *An exposition of Jordan's original proof of his theorem on finite subgroups of $GL_n(\mathbb{C})$* .
- [3] Nathaniel P. Brown and Narutaka Ozawa, *C^* -algebras and finite-dimensional approximations*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 88, American Mathematical Society, Providence, RI, 2008.
- [4] Cornelia Drutu and Michael Kapovich, *Geometric Group Theory*, Colloquium Publications, Amer Mathematical Society, 2017.
- [5] Mikhael Gromov, *Groups of polynomial growth and expanding maps*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **53** (1981), 53–73.
- [6] Bruce Kleiner, *A new proof of Gromov's theorem on groups of polynomial growth*, J. Amer. Math. Soc. **23** (2010), no. 3, 815–829.

- [7] N. Ozawa, *A functional analysis proof of Gromov's polynomial growth theorem*, ArXiv e-prints (2015), available at 1510.04223.
- [8] Yehuda Shalom, *Harmonic analysis, cohomology, and the large-scale geometry of amenable groups*, Acta Math. **192** (2004), no. 2, 119–185.
- [9] Yehuda Shalom and Terence Tao, *A finitary version of Gromov's polynomial growth theorem*, Geom. Funct. Anal. **20** (2010), no. 6, 1502–1547.
- [10] Terence Tao, *A proof of Gromov's theorem* (2010).