Das Lemma von Zorn

Stefan Kühnlein, Karlsruhe im September 2011

Das Lemma von Zorn ist einer der Sätze, die häufig benutzt, aber selten in Vorlesungen bewiesen werden. Da dies in meiner Algebra Vorlesung nicht viel anders ist, will ich das Lemma hier wenigstens schriftlich beweisen. Beweise finden sich natürlich auch in der Literatur, zum Beispiel im Algebra-Buch von Serge Lang. Trotzdem wollte ich den Beweis hier zur Verfügung stellen, im Wesentlichen den aus dem Buch von Lang.

Das Lemma von Zorn ist ein fundamentales Hilfsmittel aus der Mengenlehre. Es ist äquivalent zum Auswahlaxiom und zum Wohlordnungssatz und war von daher vor allem in der ersten Hälfte des 20. Jahrhunderts umstritten. Mittlerweile sind die Mathematiker etwas abgebrühter, auch wenn ein möglicher Verzicht auf das Auswahlaxiom immer noch in manchen Situationen explizit hervorgehoben wird.

Ich will hier das Auswahlaxiom nicht formal aufschreiben, sondern nur später im Beweis benutzen; ich hoffe, es wird dann klar, was das Auswahlaxiom bewirkt.

Nun müssen wir über geordnete Mengen sprechen. Eine geordnete Menge ist eine Menge mit einer Ordnungsrelation $\leq$ (d.h. reflexiv, transitiv, und aus $x \leq y \leq x$ folgt $x = y$).

1. Definition/Beispiel

a) Es sei $\mathcal{M}$ eine nichtleere geordnete Menge. Eine nichtleere Teilmenge $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{M}$ heißt *total geordnet*, wenn gilt:

$$\forall s, t \in \mathcal{S}: \ s \leq t \ \text{ oder } t \leq s.$$

b) Für eine Teilmenge $\mathcal{S}$ von $\mathcal{M}$ heißt ein Element $m \in \mathcal{M}$ eine *obere Schranke* von $\mathcal{S}$, wenn

$$\forall s \in \mathcal{S} : s \leq m.$$

Eine obere Schranke m heißt eine *kleinste obere Schranke* von $\mathcal{S}$, wenn für alle oberen Schranken $\tilde{m}$ von $\mathcal{S}$ gilt: $m \leq \tilde{m}$. Wenn eine kleinste obere Schranke existiert, dann ist sie eindeutig bestimmt.

c) Wenn für jede total geordnete Teilmenge von $\mathcal{M}$ eine obere Schranke existiert, dann heißt $\mathcal{M}$ *induktiv geordnet*. Wenn sogar jeweils eine kleinste obere Schranke existiert, dann heißt $\mathcal{M}$ *strikt induktiv geordnet*.

d) Wenn zum Beispiel $\mathcal{M}$ eine Teilmenge der Potenzmenge einer Menge A ist, dann ist die Inklusionsrelation eine häufig benutzte Ordnungsrelation auf $\mathcal{M}$. Eine total geordnete Teilmenge ist eine Familie $\mathcal{T}$ von Teilmengen von A, sodass für je zwei Element $B, C \in \mathcal{T}$ entweder $B \subseteq C$ oder $C \subseteq B$ gilt. Wenn nun die Vereinigung aller Mengen aus $\mathcal{T}$ auch in $\mathcal{M}$ liegt (das ist nicht selbstverständlich!), dann hat man eine (und sogar die kleinste) obere Schranke gefunden.

Viele Anwendungen des Lemmas von Zorn spielen sich in dieser Situation ab.

e) Ein Element o von $\mathcal{M}$ heißt *kleinstes Element*, wenn für alle $m \in \mathcal{M}$ gilt: $o \leq m$.

f) $O \in \mathcal{M}$ heißt *maximal,* wenn für $m \in \mathcal{M}$ gilt:

$$O \leq m \Rightarrow O = m.$$

Man ist oft daran interessiert, ob es in einer geordneten Menge $\mathcal{M}$ ein maximales Element O gibt.

Vorsicht: Ein maximales Element muss keine obere Schranke von $\mathcal{M}$ sein. Das wäre ein größtes Element.

Wenn man sich ein beliebiges Element x vorgibt und zeigt, dass es unter den Elementen, die $\geq x$ sind, ein maximales Element gibt, dann hat $\mathcal{M}$ ein maximales Element. Man darf sich demnach bei der Suche nach einem Maximum auf

$$\mathcal{M}_{\geq x} := \{m \in \mathcal{M} \mid x \leq m\}$$

einschränken, also auf eine Teilmenge von $\mathcal{M}$, die ein kleinstes Element enthält.

2. Der zentrale Hilfssatz *(Ein Fixpunktsatz)*

Es sei $\mathcal{M}$ eine nichtleere geordnete Menge mit einem kleinsten Element o. In $\mathcal{M}$ habe jede total geordnete Menge $\mathcal{T}$ eine kleinste obere Schranke. Schließlich sei $F : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}$ eine Abbildung mit der Eigenschaft

$$\forall m \in \mathcal{M} : m \leq F(m).$$

Dann gibt es ein $m \in \mathcal{M}$ mit $F(m) = m$.

Beweis. Wie nennen eine Teilmenge $\mathcal{S}$ von $\mathcal{M}$ *zulässig*, wenn die folgenden drei Bedingungen gelten: $o \in \mathcal{S}$, $F(\mathcal{S}) \subseteq \mathcal{S}$ und für jede total geordnete Teilmenge $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{S}$ liegt auch die kleinste obere Schranke $\overline{\mathcal{T}}$ in $\mathcal{S}$.

Zum Beispiel ist $\mathcal{M}$ selbst zulässig. Nun sei $\mathcal{S}_0$ der Durchschnitt aller zulässigen Teilmengen von $\mathcal{M}$. Da in jeder zulässigen Teilmenge auch o liegt, enthält der Durchschnitt zumindest das Element o. Außerdem gelten auch die beiden anderen Bedingungen der Zulässigkeit (nachrechnen!). Das heißt: $\mathcal{S}_0$ ist selbst zulässig und damit die kleinste aller zulässigen Teilmengen von $\mathcal{M}$.

Wenn wir nun zeigen können, dass $\mathcal{S}_0$ total geordnet ist, dann folgt daraus für die kleinste obere Schranke $\overline{\mathcal{S}}_0$ einerseits, dass $\overline{\mathcal{S}}_0$ das größte Element von $\mathcal{S}_0$ ist. Andererseits gilt aber wegen der Zulässigkeit $F(\overline{\mathcal{S}}_0) \in \mathcal{S}_0$. Wir bekommen insgesamt

$$\overline{\mathcal{S}}_0 \leq F(\overline{\mathcal{S}}_0) \leq \overline{\mathcal{S}}_0$$

und damit die gewünschte Gleichheit.

Noch zu zeigen ist also die folgende

Behauptung: $\mathcal{S}_0$ ist total geordnet.

Dies gilt, denn: Für den Beweis nennen wir $e \in \mathcal{S}_0$ ein *extremales Element*, wenn für alle $s \in \mathcal{S}_0$ mit $s \le e,\ s \ne e$ gilt, dass $F(s) \le e$. Zum Beispiel ist o extremal.

Für ein extremales e setzen wir

$$\mathcal{S}_e := \{s \in \mathcal{S}_0 \mid s \le e \text{ oder } F(e) \le s\}.$$

Dann ist für jedes extremale e die Menge $\mathcal{S}_e$ zulässig:

- o liegt in $\mathcal{S}_e$.
- Für jedes Element $s \in \mathcal{S}_e$ folgt aus $s < e$ schon $F(s) \le e$, aus $s = e$ folgt $F(s) \le F(e)$, und aus $s \not\le e$ folgt $F(e) \le s \le F(s)$. Also gilt insgesamt $F(\mathcal{S}_e) \subseteq \mathcal{S}_e$.
- Es sei $\mathcal{T}$ eine total geordnete Teilmenge von $\mathcal{S}_e$. Wenn dann für alle $t \in \mathcal{T}$ die Ungleichung $t \le e$ gilt, dann gilt auch $\overline{\mathcal{T}} \le e$. Wenn es aber mindestens ein t gibt, sodass die Ungleichung $t \le e$ nicht gilt, dann ist $e \le F(t) \le F(\overline{\mathcal{T}})$. Wir sehen aus diesen beiden Fällen:

$$\overline{\mathcal{T}} \in \mathcal{S}_e.$$

Da aber $\mathcal{S}_0$ die kleinste zulässige Teilmenge von $\mathcal{M}$ ist, muss also für alle extremalen e gelten:

$$\mathcal{S}_e = \mathcal{S}_0.$$

Nun müssen wir noch zeigen, dass jedes $e \in \mathcal{S}_0$ extremal ist. Dann folgt nämlich für $s \in \mathcal{S}_0$:

$$s \in \mathcal{S}_e \quad \text{also} \quad [s \le e \text{ oder } e \le F(e) \le s].$$

Das sagt dann, dass $\mathcal{S}_0$ total geordnet ist.

Um zu beweisen, dass jedes $e \in \mathcal{S}_0$ extremal ist, betrachten wir

$$\mathcal{E} := \{e \in \mathcal{S}_0 \mid e \text{ ist extremal}\}.$$

Nun weisen wir nach, dass $\mathcal{E}$ zulässig ist und daher mit $\mathcal{S}_0$ übereinstimmt

$$o \in \mathcal{E}: \quad \text{klar.}$$

Abgeschlossenheit von $\mathcal{E}$ unter F:

$$\forall e \in \mathcal{E}:\ \forall s \in \mathcal{S}_0 = \mathcal{S}_e,\ s < F(e) : F(s) \le F(e).$$

Diese letzte Ungleichung gilt, da $F(e) \not\leq s$ und damit $s \leq e$. Nun greift die Extremalität von e.

Nun sei noch $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{E}$ total geordnet, und seine kleinste obere Schranke sei $\overline{\mathcal{T}}$.

Zu zeigen ist $\overline{\mathcal{T}} \in \mathcal{E}$. Sei dazu $s \in \mathcal{S}_0$, $s < \overline{\mathcal{T}}$. Wenn für jedes $t \in \mathcal{T}$ die Relation $F(t) \leq s$ gelten würde, dann wäre $\overline{\mathcal{T}}$ als obere Schranke von extremalen Elementen selbst $\leq s$ – Widerspruch. Also gibt es ein extremales $e \in \mathcal{T}$ mit $F(e) \not\leq s$, und da $\mathcal{S}_0 = \mathcal{S}_e$ gilt, folgt daraus zwangsweise $s \leq e$. Im Fall $s < e$ bekommen wir dann $F(s) \leq e \leq \overline{\mathcal{T}}$. Im Fall $s = e$ haben wir $e = s < \overline{\mathcal{T}}$ (Vor. an s.) Es gibt demnach ein $e' \in \mathcal{T}$ mit $s = e < e'$, da $\mathcal{T}$ total geordnet ist, und wir sind wieder im ersten Fall.

Damit folgt insgesamt, dass $\overline{\mathcal{T}}$ extremal ist.

Das beendet den Beweis. ○

3. Satz *(das Lemma von Zorn)*

Es sei $\mathcal{M}$ eine nichtleere induktiv geordnete Menge. Dann besitzt $\mathcal{M}$ ein maximales Element.

Beweis. a) Wir behandeln zuerst den Fall einer strikt induktiv geordneten Menge. Da es eben langt, ein maximales Element zu finden, das $\geq x$ für ein willkürlich gewähltes x ist, dürfen wir uns auf den Fall beschränken, dass $\mathcal{M}$ ein kleinstes Element enthält. Dann nehmen wir an, es gebe kein maximales Element. Wir finden also für jedes $m \in \mathcal{M}$ ein größeres Element $F(m)$ und definieren damit eine Funktion $F : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}$, für die gilt:

$$\forall m \in \mathcal{M} : m < F(m).$$

NB: Dass man auf diese Art eine Abbildung definieren kann, ist eine Variante des Auswahlaxioms. Genau an dieser Stelle geht es im Beweis des Zornschen Lemmas ein.

Da $\mathcal{M}$ strikt induktiv geordnet ist, greift Hilfssatz 2 und wir finden einen Widerspruch: F müsste ja einen Fixpunkt haben.

b) Nun sei $\mathcal{M}$ induktiv geordnet und $\mathcal{H}$ die Menge aller total geordneten Teilmengen von $\mathcal{M}$. Dann ist $\mathcal{H}$ bezüglich der Inklusion geordnet, und zwar strikt induktiv, denn die Vereinigung einer total geordneten Familie von total geordneten Teilmengen ist wieder eine total geordnete Teilmenge und offensichtlich die kleinste obere Schranke der Familie (bezüglich Inklusion). Insbesondere besitzt $\mathcal{H}$ nach a) ein maximales Element $\mathcal{T}$. Es sei O eine obere Schranke von $\mathcal{T}$. Dann muss O schon zu $\mathcal{T}$ gehören, da $\mathcal{T} \cup \{O\}$ eine total geordnete Menge ist, die $\mathcal{T}$ enthält, aber $\mathcal{T}$ ist schon maximal.

Dieses Element O ist dann ein maximales Element in $\mathcal{M}$, denn für jedes $m \in \mathcal{M}$ folgt aus $O \leq m$, dass m eine obere Schranke von $\mathcal{T}$ ist und somit ebenfalls zu $\mathcal{T}$ gehören muss, also insbesondere $m \leq O$ und damit $m = O$. ○