Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
M.Sc. Sebastian Ohrem

Lösungsvorschlag zur Modulprüfung

Höhere Mathematik II (Analysis) für die Fachrichtung Informatik

Herbst 2022

13. September 2022

Aufgabe 1:
Bestimmen Sie die allgemeine Lösung $y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der folgenden Differentialgleichung:

$$y'''(x) + y''(x) + 2y'(x) - 4y(x) = \mathrm{e}^x. \tag{1}$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 1:
Behauptung: Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung ist gegeben durch

$$y(x) = c_1\mathrm{e}^x + c_2\mathrm{e}^{-x}\sin(\sqrt{3}x) + c_3\mathrm{e}^{-x}\cos(\sqrt{3}x) + \tfrac{1}{7}x\mathrm{e}^x$$

mit $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.

Beweis: Das charakteristische Polynom $p(\lambda) = \lambda^3 + \lambda^2 + 2\lambda - 4$ lässt sich faktorisieren zu $p(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda + 1 - \mathrm{i}\sqrt{3})(\lambda + 1 + \mathrm{i}\sqrt{3})$. Entsprechend bilden e^x, $\mathrm{e}^{-x}\sin(\sqrt{3}x)$, $\mathrm{e}^{-x}\cos(\sqrt{3}x)$ eine Basis des Lösungsraums der zu (1) gehörigen homogenen Differentialgleichung. Um eine spezielle Lösung von (1) zu erhalten, verwenden wir den Ansatz aus der Vorlesung

$$y_p(x) = ax\mathrm{e}^x$$

für $x \in \mathbb{R}$. Wir berechnen:

$$\begin{aligned} y_p(x) &= ax\mathrm{e}^x, \\ y_p'(x) &= a(x+1)\mathrm{e}^x, \\ y_p''(x) &= a(x+2)\mathrm{e}^x, \\ y_p'''(x) &= a(x+3)\mathrm{e}^x. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich:

$$y_p'''(x) + y_p''(x) + 2y_p'(x) - 4y_p(x) = 7a\mathrm{e}^x.$$

Somit ist für $a = \frac{1}{7}$ eine spezielle Lösung von (1) gegeben. Die allgemeine Lösung ist also gegeben durch $y(x) = y_\mathrm{p}(x) + y_\mathrm{h}(x)$ mit $y_\mathrm{p}(x) = \frac{1}{7}x\mathrm{e}^x$ und $y_h(x) = c_1\mathrm{e}^x + c_2\mathrm{e}^{-x}\sin(\sqrt{3}x) + c_3\mathrm{e}^{-x}\cos(\sqrt{3}x)$ für $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$. $\square$

Aufgabe 2:
Es sei $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$f(x, y, z) := \big((1 + x^2)\sin(y) + \arctan(z), x^2 + e^z\cos(y)\big).$$

Zeigen Sie: Es existieren $\delta, \eta > 0$, sodass für alle $x \in U_\delta(1)$ eine eindeutige Lösung $(y, z) = g(x) \in U_\eta((\pi, 0))$ von

$$f(x, y, z) = 0$$

existiert. Bestimmen Sie weiter $g'(1)$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 2:
<u>*Behauptung:*</u> Es existieren $\delta, \eta > 0$, sodass für alle $x \in U_\delta(1)$ eine eindeutige Lösung $(y, z) = g(x) \in U_\eta((\pi, 0))$ von

$$f(x, y, z) = 0$$

existiert. Weiter gilt

$$g'(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

<u>*Beweis:*</u> Die Funktion f ist beliebig oft differenzierbar als Komposition beliebig oft differenzierbarer Abbildungen. Für die Ableitung berechnen wir:

$$f'(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x\sin(y) & (1 + x^2)\cos(y) & \frac{1}{1+z^2} \\ 2x & -\mathrm{e}^z \sin(y) & \mathrm{e}^z \cos(y) \end{pmatrix}.$$

Insbesondere gelten

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1, \pi, 0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \frac{\partial f}{\partial (y, z)}(1, \pi, 0) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Die zweite Matrix hat Determinante $\det\Big(\frac{\partial f}{\partial x}(1, \pi, 0)\Big) = 2 \neq 0$, ist somit invertierbar. Die Inverse ist gegeben durch

$$\left(\frac{\partial f}{\partial (y, z)}(1, \pi, 0)\right)^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Zuletzt gilt $f(1, \pi, 0) = (2\sin(\pi) + \arctan(0), 1 + \mathrm{e}^0 \cos(\pi)) = (0, 0)$. Somit ist der Satz über implizit definierte Funktionen aus der Vorlesung anwendbar und liefert die Existenz von $\delta, \eta > 0$ und einer stetig differenzierbaren Abbildung $g\colon U_\delta(1) \to U_\eta((\pi, 0))$ mit den in der Behauptung geforderten Eigenschaften, und es gilt

$$g'(1) = -\left(\frac{\partial f}{\partial (y, z)}(1, \pi, 0)\right)^{-1} \frac{\partial f}{\partial x}(1, \pi, 0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}. \qquad \square$$

Aufgabe 3:

(i) Verbinden Sie die folgenden Aussagen mit logischen Beziehungen, indem Sie **eines** der folgenden Symbole $\Rightarrow$, $\Leftarrow$, $\Leftrightarrow$ oder den Text "keine Beziehung" in die Kästchen schreiben. Rechenwege und Begründungen werden nicht verlangt und nicht bewertet. Jedes Kästchen, welches die richtige Implikation enthält, wird mit +0,5 Punkten bewertet. Fehlt eine Implikation, gibt es für dieses Kästchen keinen Punkt.

Es sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

$\frac{\partial f}{\partial a}(0, 0)$ existiert für alle Richtungen $a \in \mathbb{R}^2$, $\lVert a \rVert = 1$	k.B. (a)	f ist stetig in $(0, 0)$.

Es sei $B \subseteq \mathbb{R}^3$ messbar mit $0 \in B$.

$\lvert B \rvert \leq \frac{4}{3}\pi$	$\Longleftarrow$ (b)	$B \subseteq \{x \in \mathbb{R}^3 \colon \lVert x \rVert \leq 1\}$.

Es sei $z \in \mathbb{C}$.

$\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{e}^{nz}$ konvergiert	$\Longleftarrow$ (c)	$\lvert z + 2 \rvert < 1$.

(ii) Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stetig auf $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ und $f(t) = 0$ für $|t| > \frac{\pi}{2}$. Zeigen Sie:

$$\left|\widehat{f}(1) + \widehat{f}(-1)\right| \le \frac{2}{\pi} \max_{t\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]} |f(t)|.$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 3:

(i) (a) Zu $\Longrightarrow$: Aus Existenz aller Richtungsableitungen folgt weder Differenzierbarkeit noch Stetigkeit. Als Beispiel betrachten wir

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = \begin{cases} 1, & 0 < y < x^2, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Hier existieren alle Richtungsableitungen in $(0,0)$ und sind gleich 0, aber f ist in $(0,0)$ unstetig.
Zu $\Longleftarrow$: Die Euklidnorm $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x) = \|x\|$ ist ein Beispiel einer stetigen Funktion, für die in $(0,0)$ keine Richtungsableitung existiert.

(b) Zu $\Longleftarrow$: Die Einheitskugel $K := \left\{x \in \mathbb{R}^3 \colon \|x\| \le 1\right\}$ hat nach Vorlesung Volumen $|A| = \frac{4}{3}\pi$. Somit gilt für jede messbare Menge $B \subseteq K$ auch $|B| \le |K| = \frac{4}{3}\pi$.
Zu $\Longrightarrow$: Die Menge $\{(0,0,0),(1,1,1)\}$ ist ein Gegenbeispiel.

(c) Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{e}^{nz} = \sum_{n=0}^{\infty} (\mathrm{e}^z)^n$ konvergiert (geometrische Reihe!) genau für $|\mathrm{e}^z| < 1$. Nun gilt $|\mathrm{e}^z| = \mathrm{e}^{\operatorname{Re} z}$, d.h. die Reihe konvergiert genau für $\operatorname{Re} z < 0$.
Zu $\Longleftarrow$: Für z mit $|z+2| = |z-(-2)| < 1$ gilt $\operatorname{Re} z \in (-3,-1)$. Also konvergiert die Reihe für diese z.
Zu $\Longrightarrow$: Die Zahl $z = -4$ ist ein Gegenbeispiel.

(ii) *Behauptung:* Es gilt $\left|\widehat{f}(1) + \widehat{f}(-1)\right| \le \frac{2}{\pi} \max_{t\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]} |f(t)|$.

Beweis: Wir berechnen:

$$\begin{aligned} \widehat{f}(1) + \widehat{f}(-1) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(t) \cdot \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(t)\cos(t)\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich:

$$\left|\widehat{f}(1) + \widehat{f}(-1)\right| \le \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |f(t)\cos(t)|\,\mathrm{d}t \le \frac{1}{\pi} \max_{t\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]} |f(t)| \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi} \max_{t\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]} |f(t)|. \quad \square$$

Aufgabe 4:
Schreiben Sie die gesuchten Ergebnisse in die dafür vorgesehenen Kästen. Es wird jeweils nur das Ergebnis im Kasten bewertet. Rechenwege und Begründungen werden nicht verlangt und nicht bewertet. Jede richtige Antwort wird mit +0,5 Punkten bewertet.

(i) Bestimmen Sie den folgenden Cauchyschen Hauptwert, falls dieser existiert:

$$\mathit{CH}\text{–}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^5 + x^3 + 2}{1 + x^2}\,\mathrm{d}x = \boxed{2\pi}.$$

(ii) Bestimmen Sie die Lösung von $y'(x) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} y(x), y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$:

$$y(x) = \boxed{\mathrm{e}^{2x}\begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix}} \text{ für } x \in \mathbb{R}.$$

(iii) Es sei $B := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon 0 \le z \le x^2 + y^2 \le 3, y \ge 0\right\}$. Berechnen Sie das Volumen:

$$|B| = \boxed{\frac{9\pi}{4}}.$$

(iv) Es sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = \sin(x^2+3y)$ gegeben. Bestimmen Sie die Hessematrix:

$$H_f(x,y) = \boxed{\begin{pmatrix} 2\cos(x^2+3y) - 4x^2\sin(x^2+3y) & -6x\sin(x^2+3y) \\ -6x\sin(x^2+3y) & -9\sin(x^2+3y) \end{pmatrix}} \text{ für } (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

(v) Es seien die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) = \mathrm{e}^{xy} + \sin(x)$$

und $a := \frac{1}{2}(1, \sqrt{3})$ eine Richtung. Bestimmen Sie folgende Richtungsableitung:

$$\frac{\partial f}{\partial a}(0,0) = \boxed{\tfrac{1}{2}}.$$

(vi) Es sei $M := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x \geq 0, x \leq y \leq \sqrt{x}\}$. Berechnen Sie das folgende Integral:

$$\int_M x^2 y \,\mathrm{d}(x,y) = \boxed{\frac{1}{40}}.$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 4:

(i) <u>*Behauptung:*</u> Es gilt $CH\text{–}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^5+x^3+2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = 2\pi$.

<u>*Beweis:*</u> Die Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{x^5+x^3}{1+x^2}$ ist ungerade in x. Somit gilt:

$$CH\text{–}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^5+x^3+2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = CH\text{–}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{r\to\infty} \int_{-r}^{r} \frac{2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = 2\lim_{r\to\infty} [\arctan(x)]_{-r}^{r} = 2\pi. \square$$

(ii) <u>*Behauptung:*</u> Die Lösung von $y'(x) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} y(x), y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist gegeben durch $y(x) = \mathrm{e}^{2x}\begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix}$ $(x \in \mathbb{R})$.

<u>*Beweis:*</u> Die Matrix $a := \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ hat als einzigen Eigenwert die Zahl 2. Somit liegt $v := (1,0)^\top$ im Hauptraum zum Eigenwert 2, und durch $y(x) = \mathrm{e}^{2x}(v + x(A-2I)v) = \mathrm{e}^{2x}(1,x)$ ist eine Lösung von $y'(x) = Ay(x)$ gegeben (vergleiche Formel zu Punkt 3 auf Seite 71 des HM2 - Skripts). Per Konstuktion ist $y(0) = v$ erfüllt. $\square$

(iii) <u>*Behauptung:*</u> Für $B := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon 0 \leq z \leq x^2+y^2 \leq 3, y \geq 0\}$ gilt $|B| = \frac{9\pi}{4}$.

<u>*Beweis:*</u> Mittels Zylinderkoordinaten erhalten wir folgende Darstellung von B:

$$A := \{(r,\varphi,z) \in \mathbb{R}^3 \colon 0 \leq z \leq r^2 \leq 3, \varphi \in [0,\pi]\}.$$

Daraus folgt:

$$|B| = \int_A r\,\mathrm{d}(r,\varphi,z) = \int_0^{\sqrt{3}} \int_0^{r^2} r\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}r \cdot \int_0^{\pi} 1\,\mathrm{d}\varphi = \int_0^{\sqrt{3}} r^3\,\mathrm{d}r \cdot \pi = \frac{9\pi}{4}. \qquad \square$$

(iv) <u>*Behauptung:*</u> Die Hessematrix von $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = \sin(x^2+3y)$ ist:

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2\cos(x^2+3y) - 4x^2\sin(x^2+3y) & -6x\sin(x^2+3y) \\ -6x\sin(x^2+3y) & -9\sin(x^2+3y) \end{pmatrix} \text{ für } (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Beweis: Es gelten

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= 2x\cos(x^2+3y), \\ f_y(x,y) &= 3\cos(x^2+3y), \\ f_{xx}(x,y) &= 2\cos(x^2+3y) - 4x^2\sin(x^2+3y), \\ f_{xy}(x,y) &= -6x\sin(x^2+3y), \\ f_{yy}(x,y) &= -9\sin(x^2+3y) \end{aligned}$$

für $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. □

(v) *Behauptung:* Für $f\colon \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}, f(x,y) = \mathrm{e}^{xy} + \sin(x)$ und $a := \frac{1}{2}(1,\sqrt{3})$ gilt:

$$\frac{\partial f}{\partial a}(0,0) = \tfrac{1}{2}.$$

Beweis: f ist differzierbar mit $f'(x,y) = (y\mathrm{e}^{xy} + \cos(x), x\mathrm{e}^{xy})$ für $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Daraus folgt:

$$\frac{\partial f}{\partial a}(0,0) = f'(0,0)\cdot a = (1,0)\cdot a = \tfrac{1}{2}.$$ □

(vi) *Behauptung:* Für $M := \big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\colon x\geq 0, x\leq y\leq\sqrt{x}\big\}$ gilt $\int_M x^2y\,\mathrm{d}(x,y) = \frac{1}{40}$.

Beweis: $x\leq\sqrt{x}$ gilt genau für $x\in[0,1]$, sodass wir mithilfe des Satzes von Fubini erhalten:

$$\int_M x^2y\,\mathrm{d}(x,y) = \int_0^1\int_x^{\sqrt{x}} x^2y\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^2\cdot\frac{1}{2}(x-x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right) = \frac{1}{40}.$$ □