Analysis 1 – Sommer 201~~6~~7

Aufgabe 1 Zeigen Sie: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=0}^{n-1} (2k+1)^2 = \frac{4}{3}n^3 - \frac{1}{3}n.$$

Lösung. Beweis mit vollständiger Induktion:

IA $n = 1$: Offenbar gilt $\sum_{k=0}^{0} (2k+1)^2 = 1 = \frac{4}{3} - \frac{1}{3}$.

IS: Die Behauptung gelte für ein $n \in \mathbb{N}$. Es folgt

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} (2k+1)^2 &= \sum_{k=0}^{n-1} (2k+1)^2 + (2n+1)^2 \\
&\overset{\text{IV}}{=} \frac{4}{3}n^3 - \frac{1}{3}n + 4n^2 + 4n + 1 \\
&= \frac{4}{3}n^3 + \frac{4}{3}3n^2 + \frac{4}{3}3n + \frac{4}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3}n \\
&= \frac{4}{3}(n+1)^3 - \frac{1}{3}(n+1).
\end{aligned}$$

□

Aufgabe 2 Die Folge (a_n) sei rekursiv definiert durch

$$a_1 = -\frac{3}{2} \qquad \text{und} \qquad a_{n+1} = -a_n^2 - 2a_n - 2 \quad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

Zeigen Sie, dass (a_n) konvergiert und bestimmen Sie den Grenzwert.
Hinweis: Zeigen Sie, dass $a_n \in (-2, -1)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Lösung. Wenn (a_n) einen Grenzwert $a \in \mathbb{R}$ hat, dann gilt

$$\begin{aligned}
a = -a^2 - 2a - 2 \quad &\iff \quad a^2 + 3a + 2 = 0 \\
&\iff \quad a \in \left\{-\tfrac{3}{2} \pm \tfrac{\sqrt{9-8}}{2}\right\} = \{-2, -1\}.
\end{aligned}$$

Beh: $a_n \in (-2, -1)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Beweis mit vollständiger Induktion. Die Behauptung ist klar für $n = 1$.
Die Behauptung gelte für ein $n \in \mathbb{N}$. Es gilt

$$a_{n+1} = -a_n^2 - 2a_n - 2 = -(a_n^2 + 2a_n + 1) - 1 = -(a_n + 1)^2 - 1.$$

Nach IV ist $a_n \in (-2, -1) \implies a_n + 1 \in (-1, 0) \implies (a_n + 1)^2 \in (0, 1) \implies -(a_n + 1)^2 - 1 \in (-2, -1)$.

Beh: (a_n) ist wachsend.
Beweis: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned}
&a_n \le a_{n+1} = -a_n^2 - 2a_n - 2 \\
&\iff \quad 0 \ge a_n^2 + 3a_n + 2 = a_n^2 + 2\tfrac{3}{2}a_n + \tfrac{9}{4} - \tfrac{9}{4} + \tfrac{8}{4} = (a_n + \tfrac{3}{2})^2 - \tfrac{1}{4}.
\end{aligned}$$

Da $a_n \in (-2,-1)$ folgt

$$a_n + \tfrac{3}{2} \in (-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}) \implies (a_n + \tfrac{3}{2})^2 \in [0, \tfrac{1}{4}) \implies (a_n + \tfrac{3}{2})^2 - \tfrac{1}{4} \in [-\tfrac{1}{4}, 0).$$

Da (a_n) beschränkt ist und monoton, liefert das Monotoniekriterium die Konvergenz der Folge gegen ein $a \in \{-1,-2\}$. Da (a_n) wachsend ist und $a_1 > -2$, folgt $a = -1$. □

Aufgabe 3 (a) Zeigen Sie, dass die folgende Reihe nicht konvergiert.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3+(-1)^n)^n} 2^n$$

(b) Prüfen Sie ob die folgende Reihe konvergiert.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4+(-1)^n)^n} 2^n$$

(c) Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$ für welche die folgende Potenzreihe konvergiert.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\pi^{2n}} \frac{x^n}{n+1}$$

Lösung. (a) Die Reihe konvergiert nicht, da $\left(\frac{2^n}{(3+(-1)^n)^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ keine Nullfolge ist. Es gilt nämlich

$$\frac{2^{2k+1}}{(3+(-1)^{2k+1})^{2k+1}} = \frac{2^{2k+1}}{2^{2k+1}} = 1 \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}.$$

(b) Die Reihe konvergiert. Wir verwenden das Wurzelkriterium: Für $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sqrt[n]{\left|\frac{2^n}{(4+(-1)^n)^n}\right|} = \frac{2}{4+(-1)^n} = \begin{cases} \frac{2}{5}, & n \text{ gerade} \\ \frac{2}{3}, & n \text{ ungerade} \end{cases}$$

Es folgt

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{2^n}{(4+(-1)^n)^n}\right|} = \frac{2}{3} < 1.$$

Nach dem Wurzelkriterium konvergiert die Reihe absolut.

(c) Bestimme den Konvergenzradius:

$$\sqrt[n]{\left|\frac{(-1)^n}{(\pi^2)^n}\frac{1}{n+1}\right|} = \frac{1}{\pi^2}\frac{1}{\sqrt[n]{n+1}} \begin{cases} \leq \frac{1}{\pi^2}\frac{1}{\sqrt[n]{n}} \to \frac{1}{\pi^2} \\ \geq \frac{1}{\pi^2}\frac{1}{\sqrt[n]{2}}\frac{1}{\sqrt[n]{n}} \to \frac{1}{\pi^2} \end{cases} \implies \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{(-1)^n}{(\pi^2)^n}\frac{1}{n+1}\right|} = \frac{1}{\pi^2}.$$

Der Konvergenzradius ist $r = \pi^2$.

Für $x = r$ haben wir

$$\frac{(-1)^n}{(\pi^2)^n}\frac{(\pi^2)^n}{n+1} = (-1)^n \frac{1}{n+1} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Es ist klar, dass $\frac{1}{n+1}$ eine fallende Nullfolge ist. Nach dem Leibnizkriterium konvergiert die Potenzreihe für $x = r$.

Für $x = -r$ gilt

$$\frac{(-1)^n}{(\pi^2)^n} \frac{(-1)^n (\pi^2)^n}{n+1} = \frac{1}{n+1} \geq \frac{1}{2n} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Da die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \frac{1}{n}$ divergiert, divergiert auch die Potenzreihe für $x = -r$.
Insgesamt konvergiert die Potenzreihe genau dann, wenn $x \in (-\pi^2, \pi^2]$. □

Aufgabe 4 Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} ax + b, & x \in (0, \frac{\pi}{2}) \\ \sin(x), & x \in (-\infty, 0] \cup [\frac{\pi}{2}, \infty). \end{cases}$$

Geben Sie Zahlen a und b an für die f stetig ist. Ist f dann auch differenzierbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung. Die Funktion ist stetig differenzierbar auf $\mathbb{R} \setminus \{0, \frac{\pi}{2}\}$. Insbesondere ist sie stetig in jedem Punkt $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, \frac{\pi}{2}\}$. Weil 0 und $\frac{\pi}{2}$ Häufungspunkte von $\mathbb{R}$ sind, ist f stetig in diesen Punkten, wenn

$$\lim_{x \to 0} f(x) = f(0) = 0 \quad \text{bzw.} \quad \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} f(x) = f(\tfrac{\pi}{2}) = 1.$$

Betrachte jeweils den linksseitigen und den rechtsseitigen Grenzwert. Weil Sinus und Polynome stetig sind, gelten

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 0^-} f(x) &= \sin(0) = 0 = f(0), \\
\lim_{x \to 0^+} f(x) &= a \cdot 0 + b = b, \\
\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} f(x) &= a\tfrac{\pi}{2} + b, \\
\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} f(x) &= \sin(\tfrac{\pi}{2}) = 1 = f(\tfrac{\pi}{2}).
\end{aligned}$$

Also ist f stetig in 0, wenn $0 = b$ und f ist stetig in $\frac{\pi}{2}$, wenn $a = \frac{2}{\pi}(1 - b)$. Zusammengenommen ist f genau dann stetig auf $\mathbb{R}$, wenn $b = 0$ und $a = \frac{2}{\pi}$.
Für diese Parameter ist f aber nicht differenzierbar in 0, denn der Grenzwert

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h}(f(h) - f(0)) \quad \text{existiert nicht.}$$

In der Tat sind die linksseitigen und die rechtsseitigen Grenzwerte

$$\begin{aligned}
\lim_{h \to 0^-} \tfrac{1}{h}(f(h) - f(0)) &= \lim_{h \to 0^-} \tfrac{1}{h}(\sin(h) - \sin(0)) = \sin'(0) = \cos(0) = 1 \\
\lim_{h \to 0^+} \tfrac{1}{h}(f(h) - f(0)) &= \lim_{h \to 0^+} \tfrac{1}{h}(\tfrac{2}{\pi}h) = \tfrac{2}{\pi}
\end{aligned}$$

nicht identisch. □

Aufgabe 5 Zeigen Sie die Ungleichung

$$\cosh(x) > \frac{x^2}{2} + 1 \quad \text{für alle } x \in (0, \infty).$$

Hinweis: Es gilt $\cosh(x) = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})$ *für* $x \in \mathbb{R}$.

Lösung. Definiere $f : [0,\infty) \to \mathbb{R};\ f(x) = \cosh(x) - \frac{x^2}{2} - 1$. Dann ist f beliebig oft differenzierbar und es gelten

$$\begin{aligned} f(0) &= 0 \\ f'(x) &= \sinh(x) - x, \\ f''(x) &= \cosh(x) - 1 = \tfrac{1}{2}(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}) - 1 \end{aligned}$$

für alle $x \in (0,\infty)$. Wir behaupten, dass $f''(x) > 0$ für alle $x \in (0,\infty)$. Das sieht man so: Für $x \in (0,\infty)$ haben wir

$$\tfrac{1}{2}(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}) - 1 > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{e}^{2x} + 1 - 2\mathrm{e}^x = (\mathrm{e}^x - 1)^2 > 0$$

und die rechte Seite ist wahr für alle $x \in (0,\infty)$.
Wir schließen, dass f' strikt wachsend ist auf $[0,\infty)$. Mit $f'(0) = 0$ folgt, dass $f'(x) > 0$ für alle $x \in (0,\infty)$. Somit ist auch f strikt wachsend. Mit $f(0) = 0$ folgt, dass $f(x) > 0$ für alle $x \in (0,\infty)$. Das ist gleichbedeutend mit der Aussage aus der Behauptung. □

Aufgabe 6 Untersuchen Sie die angegebenen Funktionenfolgen (f_n) und (g_n) auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz.

$$\text{(a) } f_n : [0,1] \to \mathbb{R}; \quad f_n(x) = \frac{x}{\frac{1}{n} + n!x}$$

$$\text{(b) } g_n : [0,1] \to \mathbb{R}; \quad g_n(x) = \frac{x}{\frac{1}{n} + nx^2}$$

Lösung. (a) Es gilt $f_n(0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Für $x \in (0,1]$ und alle $n \in \mathbb{N}$ haben wir

$$0 \le f_n(x) = \frac{x}{\frac{1}{n} + n!x} \le \frac{x}{n!x} = \frac{1}{n!} \to 0 \quad \text{für } n \to \infty.$$

Die Folge auf der rechten Seite ist unabhängig von x. Also konvergiert (f_n) gleichmäßig gegen $f : [0,1] \to \mathbb{R};\ f(x) = 0$. Insbesondere konvergiert die Folge punktweise.

(b) Wieder gilt $g_n(0) = 0$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Ist $x \in (0,1]$, dann gilt

$$0 \le g_n(x) = \frac{x}{\frac{1}{n} + nx^2} \le \frac{x}{nx^2} = \frac{1}{n}\frac{1}{x} \to 0 \quad \text{für } n \to \infty.$$

Somit konvergiert (g_n) punktweise gegen $g : [0,1] \to \mathbb{R};\ g(x) = 0$. Setzen wir $x_n = \frac{1}{n}$, erhalten wir jedoch

$$|g_n(x_n) - g(x_n)| = g_n(\tfrac{1}{n}) = \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n} + n\frac{1}{n^2}} = \frac{\frac{1}{n}}{2\frac{1}{n}} = \frac{1}{2} \not\to 0.$$

Hieraus folgt, dass (g_n) auf $[0,1]$ nicht gleichmäßig gegen g konvergiert. □

Aufgabe 7 (a) Berechnen Sie das unbestimmte Integral

$$\int \mathrm{e}^{3x} \sin(2x) \,\mathrm{d}x.$$

(b) Berechnen Sie das Integral

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{7\tan(x)}}{\cos^2(x)} \,\mathrm{d}x.$$

Hinweis: $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$ *für* $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ *und* $\sin(\frac{\pi}{4}) = \cos(\frac{\pi}{4})$.

Lösung. (a) Mit partieller Integration:

$$\begin{aligned}\int \underset{\uparrow}{\mathrm{e}^{3x}} \underset{\downarrow}{\sin(2x)} \,\mathrm{d}x &= \frac{1}{3}\mathrm{e}^{3x}\sin(2x) - \int \frac{1}{3}\mathrm{e}^{3x} 2\cos(2x)\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\mathrm{e}^{3x}\sin(2x) - \frac{2}{3}\int \underset{\uparrow}{\mathrm{e}^{3x}} \underset{\downarrow}{\cos(2x)} \,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{3}\mathrm{e}^{3x}\sin(2x) - \frac{2}{9}\mathrm{e}^{3x}\cos(2x) - \frac{4}{9}\int \mathrm{e}^{3x}\sin(2x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Es folgt

$$\begin{aligned}\int \mathrm{e}^{3x}\sin(2x)\,\mathrm{d}x &= \left(1+\frac{4}{9}\right)^{-1}\left(\frac{1}{3}\mathrm{e}^{3x}\sin(2x) - \frac{2}{9}\mathrm{e}^{3x}\cos(2x)\right) \\ &= \frac{3}{13}\mathrm{e}^{3x}\sin(2x) - \frac{2}{13}\mathrm{e}^{3x}\cos(2x).\end{aligned}$$

(b) Wir substituieren $u = \tan(x)$ (damit ist "$\mathrm{d}u = \frac{1}{\cos^2(x)}\mathrm{d}x$"). Da $\tan(0) = 0$ und $\tan(\frac{\pi}{4}) = 1$, erhalten wir

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{7\tan(x)}}{\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \sqrt{7u}\,\mathrm{d}u = \left[\tfrac{2}{3}(7u)^{3/2}\cdot\tfrac{1}{7}\right]_0^1 = \frac{2}{3}\frac{(\sqrt{7})^3}{(\sqrt{7})^2} = \frac{2}{3}\sqrt{7}. \qquad \square$$

Analysis 2 – Sommer 201~~6~~ 7

Aufgabe 1 Geben Sie für die folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}^2$ jeweils an ob sie beschränkt, offen, abgeschlossen oder kompakt sind. Begründen Sie Ihre Antwort.

(a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0 \text{ und } y \leq 1\}$,

(b) $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| \leq 1\}$.

Lösung. (a) Die Menge A ist *nicht beschränkt*, denn für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $(n, 0) \in A$ und es gilt $\|(n, 0)\| \to \infty$ für $n \to \infty$. Insbesondere ist A *nicht kompakt.*
A ist *nicht abgeschlossen*, denn $(\frac{1}{n}, 0) \in A$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ und $(\frac{1}{n}, 0) \to (0, 0)$ für $n \to \infty$, aber $(0, 0) \notin A$.
A ist *nicht offen*, denn $(1, 1) \in A$ und $(1, 1 + \frac{1}{n}) \notin A$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Das zeigt, dass für kein $r > 0$ die Kugel $U_r(1, 1)$ in A enthalten ist.

(b) Die Menge B ist *beschränkt*: Für alle $(x, y) \in B$ gilt $|x| \leq |x| + |y| \leq 1$ und genauso $|y| \leq 1$. Es folgt, dass $\|(x, y)\| = \sqrt{|x|^2 + |y|^2} \leq \sqrt{2}$.
B ist *abgeschlossen*: Ist $\big((x_n, y_n)\big)$ eine Folge in B die gegen ein $(x, y) \in \mathbb{R}$ konvergiert, dann konvergieren die reellen Folgen (x_n) und (y_n) gegen x bzw. y. Mit der Stetigkeit des Betrags schließen wir $|x_n| \to |x|$ sowie $|y_n| \to |y|$ und damit auch $|x_n| + |y_n| \to |x| + |y|$ jeweils für $n \to \infty$. Wegen $|x_n| + |y_n| \in [0, 1]$ für alle $n \in \mathbb{N}$ (und weil $[0, 1]$ abgeschlossen ist), folgt $|x| + |y| \in [0, 1]$. Das bedeutet $(x, y) \in B$.
Weil B beschränkt und abgeschlossen ist, ist B *kompakt.*
B ist *nicht offen*: Es gilt $(1, 0) \in B$, aber $(1, \frac{1}{n}) \notin B$ für alle $n \in \mathbb{N}$, denn $|1| + |\frac{1}{n}| > 1$. Das zeigt, dass für kein $r > 0$ die Kugel $U_r(1, 0)$ in B enthalten ist. □

Aufgabe 2 Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x, y, z) = \begin{cases} \dfrac{xz^2}{x^2 + y^2 + z^2}, & (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}, \\ 0, & (x, y, z) = (0, 0, 0). \end{cases}$$

Zeigen Sie:

(a) f ist stetig.

(b) Für alle $v \in \mathbb{R}^3$ mit $\|v\| = 1$ existiert die Richtungsableitung $\dfrac{\partial f}{\partial v}(0, 0, 0)$.

(c) f ist nicht differenzierbar in $(0, 0, 0)$.

Lösung. (a) Als Komposition stetiger Funktionen ist f stetig auf $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$. Zu zeigen ist Stetigkeit in $(0, 0, 0)$. Sei $\big((x_k, y_k, z_k)\big)$ eine Folge in $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ die gegen $(0, 0, 0)$ konvergiert. Insbesondere konvergieren die Komponenten dieser Folge.
Für alle $k \in \mathbb{N}$ mit $z_k = 0$ haben wir $f(x_k, y_k, z_k) = 0$. Falls $z_k \neq 0$, dann gilt wegen $x_k^2, y_k^2 \geq 0$, dass

$$|f(x_k, y_k, z_k)| = \frac{|x_k z_k^2|}{x_k^2 + y_k^2 + z_k^2} \leq \frac{|x_k| z_k^2}{z_k^2} = |x_k| \to 0 \quad \text{für } k \to \infty.$$

Das zeigt, dass $f(x_k, y_k, z_k) \to 0$ für $k \to \infty$ und damit, dass f stetig in $(0,0,0)$ ist.

(b) Sei $v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$ mit $\|v\| = 1$. Für alle $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gilt

$$f(tv) = \frac{t^3 v_1 v_3^2}{t^2 \|v\|^2} = t v_1 v_3^2.$$

Hieraus folgt

$$\frac{1}{t}\big(f(tv) - f(0)\big) = v_1 v_3^2 \to v_1 v_3^2 \quad \text{für } t \to 0.$$

Also existiert die Richtungsableitung und es gilt $\frac{\partial f}{\partial v}(0,0,0) = v_1 v_3^2$.

(c) Nach Teil (b) ist der Gradient von f im Ursprung $\operatorname{grad} f(0,0,0) = (0,0,0)$. Er liefert den einzigen Kandidaten für $f'(0)$. Betrachte die Nullfolge (h_k) mit den Gliedern $h_k = (\frac{1}{k}, \frac{1}{k}, \frac{1}{k})$ für $k \in \mathbb{N}$. Es gilt

$$\frac{1}{\|h_k\|}|f(h_k) - f(0) - (0,0,0)h_k| = \frac{1}{\sqrt{3}\frac{1}{k}} \frac{\frac{1}{k}\frac{1}{k^2}}{3\frac{1}{k^2}} = \frac{1}{3\sqrt{3}}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$. Weil diese Folge nicht gegen Null konvergiert, ist f nicht differenzierbar in $(0,0,0)$. □

Aufgabe 3 Bestimmen Sie alle stationären Punkte der Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}; \quad f(x,y) = x^3 - y^2 + 2xy - x.$$

Untersuchen Sie jeweils ob f an diesen Stellen ein lokales Minimum oder Maximum hat.
Hinweis für Hörer von Prof. Schnaubelt: "stationär" ist hier gleichbedeutend mit "kritisch".

Lösung. Die stationären Punkte von f sind die Nullstellen der ersten Ableitung. Wir berechnen

$$f'(x,y) = (3x^2 + 2y - 1, -2y + 2x).$$

Also ist $f'(x,y) = (0,0)$ genau dann, wenn $x = y$ und $3x^2 + 2x - 1 = 0$. Wir erhalten

$$f'(x,y) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = y = \frac{-2}{6} + \frac{\sqrt{4+12}}{6} = \frac{1}{3} \text{ oder } x = -\frac{1}{3} - \frac{2}{3} = -1.$$

Die stationären Punkte sind also $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ und $(-1,-1)$.
Wir berechnen auch die Hessematrix:

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{für } (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Es folgt

$$H_f(\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}, \qquad H_f(-1,-1) = \begin{pmatrix} -6 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Da $\det H_f(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}) = -4 < 0$ ist $H_f(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ indefinit und damit hat f in $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ kein lokales Extremum.
Weil $-6 < 0$ und $\det H_f(-1,-1) = 8 > 0$, ist $H_f(-1,-1)$ negativ definit und damit besitzt f in $(-1,-1)$ ein lokales Maximum. □

Aufgabe 4 Zeigen Sie, dass es offene Umgebungen $U \subseteq \mathbb{R}$ von 1 und $V \subseteq \mathbb{R}^2$ von $(2,0)$ sowie eine Funktion $g \in C^1(U, \mathbb{R}^2)$ mit $g(1) = (2,0)$ gibt derart, dass alle Lösungen des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x + y_1^2 - x\sin(y_2) &= 5 \\ x^5 - y_1 &= -1 \end{aligned}$$

in $U \times V$ durch $(x, g(x))$ mit $x \in U$ gegeben sind. Berechnen Sie $g'(1)$.

Lösung. Betrachte $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$F(x, y_1, y_2) = \begin{pmatrix} x + y_1^2 - x\sin(y_2) - 5 \\ x^5 - y_1 + 1 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt $F(x, y_1, y_2) = (0,0)$ genau dann, wenn (x, y_1, y_2) das Gleichungssystem aus der Aufgabenstellung erfüllt. Insbesondere ist $F(1,2,0) = (0,0)$. Als Komposition stetig differenzierbarer Funktionen ist $F \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$. Wir berechnen

$$\frac{\partial F}{\partial(y_1, y_2)}(x, y_1, y_2) = \begin{pmatrix} 2y_1 & -x\cos(y_2) \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \frac{\partial F}{\partial x}(x, y_1, y_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 5x^4 \end{pmatrix}$$

für $(x, y_1, y_2) \in \mathbb{R}^3$. Es gilt

$$\det \frac{\partial F}{\partial(y_1, y_2)}(1,2,0) = \det \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = -1 \neq 0.$$

Also ist $\frac{\partial F}{\partial(y_1, y_2)}(1,2,0)$ invertierbar. Der Satz über implizit definierte Funktionen liefert die Behauptung. Weiter gilt

$$g'(1) = -\left(\frac{\partial F}{\partial(y_1, y_2)}(1,2,0)\right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial x}(1,2,0) = -\frac{1}{-1}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 21 \end{pmatrix}. \qquad \square$$

Aufgabe 5 (a) Seien $\gamma : [-1, \sqrt{\pi + 1}] \to \mathbb{R}^2$; $\gamma(t) = \begin{pmatrix} t^2 - 1 \\ t \end{pmatrix}$ und $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$; $f(x,y) = \begin{pmatrix} x - y^2 \\ y\cos(x) \end{pmatrix}$. Berechnen Sie

$$\int_\gamma f(x,y) \cdot \mathrm{d}(x,y).$$

(b) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$; $f(x,y) = \begin{pmatrix} -3x^2y - \frac{2x}{x^2+1} \\ 4 - x^3 - e^{-y} \end{pmatrix}$. Zeigen Sie, dass f eine Stammfunktion besitzt und bestimmen Sie diese.

Hinweise für Hörer von Prof. Schnaubelt: In (a) ist das Wegintegral 2. Art von f über $\Gamma = \gamma([0, \sqrt{\pi + 1}])$ zu berechnen. In (b) ist "Stammfunktion" gleichbedeutend mit "Potential".

Lösung. (a) Die Komponentenfunktionen von γ sind stetig differenzierbar, also gilt $\gamma \in C^1([-1, \sqrt{\pi+1}], \mathbb{R}^2)$. Es gilt

$$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{für alle } t \in [-1, \sqrt{\pi+1}].$$

Die Funktion f ist stetig als Komposition stetiger Abbildungen. Weiter gilt

$$f(\gamma(t)) = \begin{pmatrix} t^2 - 1 - t^2 \\ t\cos(t^2-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ t\cos(t^2-1) \end{pmatrix} \quad \text{für } t \in [-1, \sqrt{\pi+1}]$$

und somit

$$\begin{aligned} \int_\gamma f(x,y) \cdot \mathrm{d}(x,y) &= \int_{-1}^{\sqrt{\pi+1}} f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^{\sqrt{\pi+1}} -2t + t\cos(t^2-1)\,\mathrm{d}t \\ &= \left[-t^2 + \tfrac{1}{2}\sin(t^2-1)\right]_{-1}^{\sqrt{\pi+1}} = -(\pi+1) + \tfrac{1}{2}\sin(\pi) + 1 - \tfrac{1}{2}\sin(0) = -\pi \end{aligned}$$

(b) Es ist klar, dass $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$. Weiter gilt

$$\partial_2 f_1(x,y) = -3x^2 = \partial_1 f_2(x,y) \quad \text{für alle } (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Damit ist die Integrabilitätsbedingung für f erfüllt. Weil $\mathbb{R}^2$ konvex ist (und damit sternförmig) ist die Existenz einer Stammfunktion $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ von f gesichert. (Auch die folgende Konstruktion einer Stammfunktion ist eine Beweis für deren Existenz.) Es gilt

$$\partial_1 F(x,y) = f_1(x,y) = -3x^2 y - \frac{2x}{x^2+1} \quad \text{für alle } (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Hieraus folgt, dass $F(x,y) = -x^3 y - \log(x^2+1) + g(y)$ für $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ für eine Funktion $g \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Wir erhalten

$$-x^3 + g'(y) = \partial_2 F(x,y) = f_2(x,y) = 4 - x^3 - \mathrm{e}^{-y} \quad \text{für alle } (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

sodass $g'(y) = 4 - \mathrm{e}^{-y}$ bzw. $g(y) = 4y + \mathrm{e}^{-y} + c$ für alle $y \in \mathbb{R}$ für ein $c \in \mathbb{R}$. Wir erhalten

$$F(x,y) = y(4 - x^3) - \log(x^2+1) + \mathrm{e}^{-y}.$$

□

Aufgabe 6 (a) Bestimmen Sie die Lösung des folgenden Anfangswertproblems mit maximalem Definitionsbereich.

$$y'(x) = \frac{1}{y(x)}\sqrt{1 - y^2(x)}, \quad y(0) = \sqrt{\frac{3}{4}}.$$

(b) Zeigen Sie, dass das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} y_1'(x) &= \sqrt{y_2(x) - 1} + x^2 y_1^2(x), & y_1(0) &= y_{0,1} \\ y_2'(x) &= \tfrac{1}{2} y_1(x) \sin(x\, y_2(x)) & y_2(0) &= y_{0,2} \end{aligned}$$

für alle $y_0 = (y_{0,1}, y_{0,2}) \in \mathbb{R} \times (1, \infty)$ eine eindeutige Lösung besitzt.

Lösung. (a) Es handelt sich um eine Differentialgleichung mit getrennten Veränderlichen. Wir setzen $f \in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$; $f(x) = 1$ und $g \in C((0,1),\mathbb{R})$; $g(v) = \frac{\sqrt{1-v^2}}{v}$. Die Differentialgleichung lässt sich schreiben als $y' = f(x)g(y)$.
Da $g(v) \neq 0$ für alle $v \in (0,1)$, existiert die nicht fortsetzbare Lösung $y \in C(I_0,\mathbb{R})$ des Anfangswertproblems auf einem Intervall $I_0 \subseteq \mathbb{R}$. Sie erfüllt

$$x - 0 = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\sqrt{\frac{3}{4}}}^{y(x)} \frac{1}{g(v)}\,\mathrm{d}v = \int_{\sqrt{\frac{3}{4}}}^{y(x)} \frac{v}{\sqrt{1-v^2}}\,\mathrm{d}v = \left[-\sqrt{1-v^2}\right]_{\sqrt{\frac{3}{4}}}^{y(x)}$$
$$= \sqrt{1-\tfrac{3}{4}} - \sqrt{1-(y(x))^2} = \tfrac{1}{2} - \sqrt{1-(y(x))^2}$$

für alle $x \in I_0$. Da $y(x) \in (0,1)$ für alle $x \in I_0$, folgt

$$\tfrac{1}{2} - x = \sqrt{1-(y(x))^2} \quad \Longleftrightarrow \quad y(x) = \sqrt{1-(\tfrac{1}{2}-x)^2}$$

Die rechte Seite liefert eine C^1–Funktion falls $1-(\frac{1}{2}-x)^2 > 0 \Longleftrightarrow |\frac{1}{2}-x| < 1$. Somit ist $I_0 = (-\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$.

(b) Definiere $f : \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times(1,\infty) \to \mathbb{R}^2$ durch

$$f(x,v,w) = \begin{pmatrix} \sqrt{w-1} + x^2v^2 \\ \frac{1}{2}v\sin(xw) \end{pmatrix}.$$

Dann lässt sich die Differentialgleichung schreiben als $y' = f(x,y)$. Als Komposition stetig differenzierbarer Funktionen ist f stetig differenzierbar. Insbesondere erfüllt f eine lokale Lipschitz-Bedingung bezüglich (v,w). Der Satz von Picard-Lindelöf (lokale Version) liefert die Behauptung. □

Aufgabe 7 Seien

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad y_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie eine Fundamentalmatrix der Differentialgleichung $y' = Ay$ und eine Lösung $y \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R}^3)$ des Anfangswertproblems $y' = Ay$, $y(0) = y_0$.
Hinweis für Hörer von Prof. Schnaubelt: "Fundamentalmatrix" ist hier gleichbedeutend mit "Fundamentallösung".

Lösung. Das charakteristische Polynom von A ist

$$\det\begin{pmatrix} X & -1 & 1 \\ 1 & X & 3 \\ 0 & 0 & X+3 \end{pmatrix} = X^2(X+3) + (X+3) = (X^2+1)(X+3).$$

Die Eigenwerte von A sind somit $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = \mathrm{i}$ und $\lambda_3 = -\mathrm{i}$. Wir bestimmen die zu λ_1 und λ_2 gehörenden Eigenvektoren. Es gilt

$$\begin{aligned}\operatorname{Kern}(A-\lambda_1) &= \operatorname{Kern}\begin{pmatrix}3 & 1 & -1\\ -1 & 3 & -3\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} = \operatorname{Kern}\begin{pmatrix}1 & -3 & 3\\ 0 & 10 & -10\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\\ &= \operatorname{Kern}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} = [\begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix}] = [\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}].\end{aligned}$$

Eine Lösung der Differentialgleichung ist $y_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$;

$$y_1(x) = \mathrm{e}^{-3x}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ \mathrm{e}^{-3x}\\ \mathrm{e}^{-3x}\end{pmatrix}.$$

Weiter gilt

$$\begin{aligned}\operatorname{Kern}(A-\lambda_2) &= \operatorname{Kern}\begin{pmatrix}-\mathrm{i} & 1 & -1\\ -1 & -\mathrm{i} & -3\\ 0 & 0 & -3-\mathrm{i}\end{pmatrix} = \operatorname{Kern}\begin{pmatrix}1 & \mathrm{i} & -\mathrm{i}\\ 0 & 0 & -3-\mathrm{i}\\ 0 & 0 & -3-\mathrm{i}\end{pmatrix}\\ &= \operatorname{Kern}\begin{pmatrix}1 & \mathrm{i} & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = [\begin{pmatrix}\mathrm{i}\\-1\\0\end{pmatrix}].\end{aligned}$$

Die zum Eigenwert λ_2 gehörende komplexe Lösung ist also $\tilde{y} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$;

$$\tilde{y}(x) = \mathrm{e}^{0+\mathrm{i}x}\begin{pmatrix}\mathrm{i}\\-1\\0\end{pmatrix} = (\cos(x)+\mathrm{i}\sin(x))\begin{pmatrix}\mathrm{i}\\-1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\sin(x)\\-\cos(x)\\0\end{pmatrix} + \mathrm{i}\begin{pmatrix}\cos(x)\\-\sin(x)\\0\end{pmatrix}$$

Ihr Real- und Imaginärteil liefern die reellen Lösungen $y_2, y_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$y_2(x) = \begin{pmatrix}-\sin(x)\\-\cos(x)\\0\end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad y_3(x) = \begin{pmatrix}\cos(x)\\-\sin(x)\\0\end{pmatrix}$$

Eine Fundamentalmatrix von $y'(x) = Ay(x)$ ist somit $Y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{3\times 3}$;

$$Y(x) = \begin{pmatrix}0 & -\sin(x) & \cos(x)\\ \mathrm{e}^{-3x} & -\cos(x) & -\sin(x)\\ \mathrm{e}^{-3x} & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung ist $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$;

$$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + c_3y_3(x) = Y(x)\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}.$$

Die Anfangsbedingung wird von y erfüllt, wenn

$$y(0) = Y(0)\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Die erste und die dritte Zeile dieses linearen Gleichungssystems liefern $c_3 = 1$ und $c_1 = 2$. Die zweite Zeile impliziert dann, dass $2 - c_2 = c_1 - c_2 = 1$ also $c_2 = 1$. Die Lösung des Anfangswertproblems ist damit

$$y(x) = \begin{pmatrix} -\sin(x) + \cos(x) \\ 2\mathrm{e}^{-3x} - \cos(x) - \sin(x) \\ 2\mathrm{e}^{-3x} \end{pmatrix}. \qquad \square$$

Analysis 3 – Herbst 2017

Aufgabe 1 Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \int_B \frac{1+x^n y^n}{1+x^2+y^2}\,\mathrm{d}(x,y) = \pi \ln 2$, wobei $B = B(0,1) \subseteq \mathbb{R}^2$.

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \int_0^1 \frac{x^k(1-x)}{1+x}\,\mathrm{d}x = \ln 2$.

Lösung. a) Betrachte $f_n : B \to \mathbb{R}$, $f_n(x,y) = \frac{1+x^n y^n}{1+x^2+y^2}$ für $n \in \mathbb{N}$. Die Funktionen f_n sind stetig und somit messbar. Für alle $(x,y) \in B$ gilt insbesondere $|x| < 1$ und $|y| < 1$ und somit

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x,y) = \frac{1}{1+x^2+y^2}.$$

Außerdem gilt $|f_n(x,y)| \leq \frac{2}{1+x^2+y^2} \leq 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $(x,y) \in B$. Da $\lambda_2(B) < \infty$ ist, ist die konstante Funktion 2 eine integrierbare Majorante. Der Satz von Lebesgue und eine Rechnung in Polarkoordinaten zeigen nun

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \int_B \frac{1+x^n y^n}{1+x^2+y^2}\,\mathrm{d}(x,y) &= \lim_{n\to\infty} \int_B f_n(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) = \int_B \lim_{n\to\infty} f_n(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) \\
&= \int_B \frac{1}{1+x^2+y^2}\,\mathrm{d}(x,y) = \pi \int_0^1 \frac{2r}{1+r^2}\,\mathrm{d}r \\
&= \pi \ln(1+r^2)\Big|_0^1 = \pi \ln 2.
\end{aligned}$$

b) Für alle $x \in (0,1)$ gilt

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k(1-x)}{1+x} = \frac{1-x}{1+x} \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x}{1+x} \cdot \frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \frac{1-x^{n+1}}{1+x}.$$

Betrachte also $f_n : (0,1) \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{1-x^n}{1+x}$. Die Funktionen f_n sind stetig und somit messbar. Es gilt für alle $x \in (0,1)$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \frac{1}{1+x}.$$

Außerdem gilt $|f_n(x)| \leq \frac{2}{1+x} \leq 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x \in (0,1)$. Da $\lambda((0,1)) < \infty$ ist, ist die konstante Funktion 2 eine integrierbare Majorante. Der Satz von Lebesgue zeigt nun

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \int_0^1 \frac{x^k(1-x)}{1+x}\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_{n+1}(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x = \ln x\Big|_0^1 = \ln 2. \qquad \square$$

Aufgabe 2

a) Sei X eine Menge, $\mathcal{B}$ eine σ-Algebra auf X und $f : X \to X$ eine Abbildung. Definiere

$$\mathcal{A} = \left\{ A \subseteq X \;\middle|\; A = f^{-1}(B) \text{ für ein } B \in \mathcal{B} \right\}.$$

Zeigen Sie, dass $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra auf X ist.

b) Seien $f_n : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ Borel-messbare Funktionen für $n \in \mathbb{N}$. Definiere

$$M = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n(x)}{n} < 1 \right\}.$$

Zeigen Sie, dass M ein Borelmenge ist.

Lösung. a) Nach Definition gilt $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Da $\mathcal{B}$ eine σ-Algebra ist, liegt X in $\mathcal{B}$. Es gilt $f^{-1}(X) = X$ und somit folgt $X \in \mathcal{A}$. Sei $A \in \mathcal{A}$. Dann gibt es $B \in \mathcal{B}$ mit $A = f^{-1}(B)$. Da $\mathcal{B}$ eine σ-Algebra ist, liegt auch B^{c} in $\mathcal{B}$. Außerdem gilt

$$A^{\mathsf{c}} = \left(f^{-1}(B)\right)^{\mathsf{c}} = X \setminus \{x \in X \,|\, f(x) \in B\} = \{x \in X \,|\, f(x) \notin B\} = f^{-1}(B^{\mathsf{c}}) \in \mathcal{A}.$$

Seien schließlich $A_n \in \mathcal{A}$, $n \in \mathbb{N}$. Dann existieren $B_n \in \mathcal{B}$, $n \in \mathbb{N}$ mit $A_n = f^{-1}(B_n)$. Da $\mathcal{B}$ eine σ-Algebra ist, liegt auch $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$ in $\mathcal{B}$. Somit erhalten wir

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}(B_n) = f^{-1}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) \in \mathcal{B}.$$

Insgesamt erfüllt $\mathcal{A}$ alle Eigenschaften einer σ-Algebra.
b) Definiere $g : \mathbb{R} \to [0, \infty]$, $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n(x)}{n}$. Die Funktion g ist messbar als punktweiser Grenzwert messbarer Funktionen. Da $[0, 1)$ eine Borelmenge ist, ist auch

$$M = g^{-1}([0, 1))$$

eine Borelmenge. □

Aufgabe 3 Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ integrierbar. Definiere

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g(t) = \int_t^{t+1} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

a) Zeigen Sie, dass g stetig ist.
b) Zeigen Sie, dass $\lim\limits_{t\to\infty} g(t) = 0$ gilt.

Lösung. a) Betrachte $h : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(t, x) = \mathbb{1}_{(t,t+1)}(x) f(x)$. Für jedes $t \in \mathbb{R}$ ist $x \mapsto h(t, x)$ messbar, da $h(t, \cdot)$ das Produkt einer einfachen messbaren Funktion und der messbaren Funktion f ist. Es gilt $|h(t, x)| \le |f(x)|$ für alle $t, x \in \mathbb{R}$ und die Funktion $|f|$ ist nach Voraussetzung integrierbar. Seien $t_0, x \in \mathbb{R}$ beliebig gewählt. Es gilt

$$\lim_{t\to t_0} h(t, x) = \lim_{t\to t_0} \mathbb{1}_{(t,t+1)}(x) f(x) = \begin{cases} f(x), & x \in (t_0, t_0 + 1), \\ 0, & x \notin (t_0, t_0 + 1) \end{cases} = h(t_0, x),$$

d.h. $h(\cdot, x)$ ist stetig. Da $g(t) = \int_{\mathbb{R}} h(t, x)\,\mathrm{d}x$ für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt, folgt die Behauptung nun aus dem Stetigkeitssatz.
b) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{1}_{(t,t+1)}(x) f(x) = 0.$$

Außerdem gilt

$$\left|\mathbb{1}_{(t,t+1)}(x)f(x)\right| \leq |f(x)|$$

für alle $t, x \in \mathbb{R}$. Also ist $|f|$ eine integrierbare Majorante und der Satz von Lebesgue liefert

$$\lim_{t\to\infty} g(t) = \lim_{t\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{(t,t+1)}(x)f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \lim_{t\to\infty} \mathbb{1}_{(t,t+1)}(x)f(x)\,\mathrm{d}x = 0. \qquad \square$$

Aufgabe 4
a) Gegeben sei die Fläche

$$M_1 = \{(r\cos\varphi, r\sin\varphi, \varphi) \,|\, 0 < r < 1, 0 < \varphi < 2\pi\}$$

und die Funktion

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y,z) = \sqrt{1 + x^2 + y^2}.$$

Berechnen Sie $\int_{M_1} f\,\mathrm{d}\sigma$.
b) Gegeben sei die Fläche

$$M_2 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, z^2 = x^2 - y^2, 0 < z, 0 < y < 1, y < x < 1\right\}.$$

Berechnen Sie das Oberflächenmaß $\sigma(M_2)$.

Lösung. a) Betrachte $G : (0,1) \times (0,2\pi) \to \mathbb{R}^3$, $G(r,\varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi, \varphi)$. Die Fläche M_1 wird von der stetig differenzierbaren Funktion G parametrisiert. Die Gramsche Determinante lautet

$$g_G(r,\varphi) = \det G'(r,\varphi)^\intercal G'(r,\varphi) = \det \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -r\sin\varphi & r\cos\varphi & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2+1 \end{pmatrix} = 1 + r^2.$$

Es folgt

$$\int_{M_1} f\,\mathrm{d}\sigma = \int_{(0,1)\times(0,2\pi)} f(G(r,\varphi))\sqrt{g_G(r,\varphi)}\,\mathrm{d}(r,\varphi) = \int_0^1 \int_0^{2\pi} 1 + r^2\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi = \frac{8}{3}\pi.$$

b) Seien $\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 < y < 1, y < x < 1\}$ und $h : \Delta \to \mathbb{R}$, $h(x,y) = \sqrt{x^2 - y^2}$. Dann ist h stetig differenzierbar mit

$$\nabla h(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2-y^2}} \\ \frac{-y}{\sqrt{x^2-y^2}} \end{pmatrix}$$

für alle $(x,y) \in \Delta$ und M_2 ist der Graph von h. Folglich ist M_2 eine C^1-Fläche und es gilt

$$\begin{aligned}\sigma(M_2) &= \int_\Delta \sqrt{1+|\nabla h(x,y)|_2^2}\,\mathrm{d}(x,y)\\ &= \int_0^1\int_y^1 \sqrt{1+\frac{x^2}{x^2-y^2}+\frac{y^2}{x^2-y^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\ &= \sqrt{2}\int_0^1\int_y^1 \frac{x}{\sqrt{x^2-y^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \sqrt{2}\int_0^1 \sqrt{x^2-y^2}\Big|_{x=y}^{x=1}\,\mathrm{d}y\\ &= \sqrt{2}\int_0^1\sqrt{1-y^2}\,\mathrm{d}y = \sqrt{2}\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-\sin^2 y}\cos y\,\mathrm{d}y\\ &= \sqrt{2}\int_0^{\pi/2}\cos^2 y\,\mathrm{d}y = \frac{\sqrt{2}}{4}\pi. \qquad\square\end{aligned}$$

Aufgabe 5
a) Sei $D=[0,1]\times[1,2]$. Berechnen Sie

$$\int_D \frac{\mathrm{e}^{x/y}}{y^3}\,\mathrm{d}(x,y).$$

b) Berechnen Sie

$$\int_0^1\int_x^1 \mathrm{e}^{x/y}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$$

Lösung. a) Betrachte $f: D\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=y^{-3}\mathrm{e}^{x/y}$. Die Funktion f ist stetig und somit messbar sowie positiv. Nach dem Satz von Tonelli gilt

$$\begin{aligned}\int_D f\,\mathrm{d}(x,y) &= \int_D \frac{\mathrm{e}^{x/y}}{y^3}\,\mathrm{d}(x,y) = \int_1^2\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{x/y}}{y^3}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_1^2 \frac{\mathrm{e}^{x/y}}{y^2}\Big|_{x=0}^{x=1}\mathrm{d}y = \int_1^2 \frac{\mathrm{e}^{1/y}}{y^2}-\frac{1}{y^2}\,\mathrm{d}y\\ &= -\mathrm{e}^{1/y}\Big|_1^2 + \frac{1}{y}\Big|_1^2 = \mathrm{e}-\sqrt{\mathrm{e}}-\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

b) Setze $D=\{(x,y)\,|\,0<x<1, x<y<1\}$. Betrachte $f: D\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=\mathrm{e}^{x/y}$. Die Funktion f ist stetig und somit messbar und positiv. Für alle $y\in(0,1)$ gilt $D_y=\{x\,|\,0<x<1, x<y<1\}=(0,y)$ und $D_y=\emptyset$ für alle $y\in\mathbb{R}\setminus(0,1)$. Für alle $x\in(0,1)$ gilt $D^x=\{y\,|\,0<x<1,x<y<1\}=(x,1)$ und $D^x=\emptyset$ für alle $x\in\mathbb{R}\setminus(0,1)$. Der Satz von Tonelli liefert

$$\begin{aligned}\int_D f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) &= \int_0^1\int_x^1 \mathrm{e}^{x/y}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^1\int_0^y \mathrm{e}^{x/y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 y\mathrm{e}^{x/y}\Big|_{x=0}^{x=y}\mathrm{d}y\\ &= \int_0^1(\mathrm{e}-1)y\,\mathrm{d}y = \frac{\mathrm{e}-1}{2}. \qquad\square\end{aligned}$$

Aufgabe 6 Sei $\varepsilon\in(0,1)$ und $D_\varepsilon = B((1,0),2)\setminus\bar{B}(0,\varepsilon)\subseteq\mathbb{R}^2$. Sei

$$f:\mathbb{R}^2\setminus\{0\}\to\mathbb{R}^2,\quad f(x)=\frac{x}{|x|_2^2}.$$

Zeigen Sie

$$\int_{D_\varepsilon} \operatorname{div} f(x)\, \mathrm{d}x = 0$$

und

$$\int_{\partial B\left((1,0),2\right)} (f|\nu)\, \mathrm{d}\sigma = 2\pi,$$

wobei ν die äußere Einheitsnormale an $B((1,0),2)$ ist.

Lösung. Für alle $x \in D_\varepsilon$ gilt

$$\begin{aligned}\operatorname{div} f(x) &= \partial_1\left(\frac{x_1}{x_1^2+x_2^2}\right) + \partial_2\left(\frac{x_2}{x_1^2+x_2^2}\right)\\ &= \frac{1}{x_1^2+x_2^2} - \frac{2x_1^2}{(x_1^2+x_2^2)^2} + \frac{1}{x_1^2+x_2^2} - \frac{2x_2^2}{(x_1^2+x_2^2)^2} = \frac{2}{x_1^2+x_2^2} - \frac{2(x_1^2+x_2^2)}{(x_1^2+x_2^2)^2} = 0.\end{aligned}$$

Die Menge D_ε hat den C_1-Rand $\partial D_\varepsilon = \partial B((1,0),2) \cup \partial\left(\mathbb{R}^2 \setminus B(0,\varepsilon)\right)$, die Funktion f liegt in $C^1(D_\varepsilon, \mathbb{R}^2) \cap C_b(\bar{D}_\varepsilon, \mathbb{R}^2)$. Nach dem Satz von Gauß gilt

$$0 = \int_{D_\varepsilon} \operatorname{div} f\, \mathrm{d}\lambda_3 = \int_{\partial D_\varepsilon} (f|\nu)\, \mathrm{d}\sigma = \int_{\partial B\left((1,0),2\right)} (f|\nu)\, \mathrm{d}\sigma - \int_{\partial B(0,\varepsilon)} (f|\nu)\, \mathrm{d}\sigma.$$

Wir berechnen mit $\nu(x) = \frac{x}{|x|_2}$ für alle $x \in \partial B(0,\varepsilon)$ das Integral

$$\int_{\partial B(0,\varepsilon)} (f|\nu)\, \mathrm{d}\sigma = \int_{\partial B(0,\varepsilon)} \frac{1}{|x|_2^3}\,(x|x)\, \mathrm{d}\sigma = \frac{1}{\varepsilon}\int_{\partial B(0,\varepsilon)} 1\, \mathrm{d}\sigma = 2\pi.$$

Daraus folgt die Behauptung. □

Aufgabe 7 Seien $m \in \mathbb{N}$ und $B = B(0,1) \subseteq \mathbb{R}^m$. Seien $p \in (1,\infty)$, $0 < \alpha < m(1-\frac{1}{p})$ und $f \in L^p(B)$. Sei

$$g : B \to \mathbb{R}, \quad g(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)}{|x|^\alpha}, & x \in B \setminus \{0\},\\ 0, & x = 0.\end{cases}$$

Zeigen Sie, dass g in $L^1(B)$ liegt.

Lösung. Wähle $p' \in (1,\infty)$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Nach Voraussetzung gilt $m - \alpha p' > 0$. Betrachte $h : B \to \mathbb{R}$, $h(x) = |x|^{-\alpha}$ für $x \in B \setminus \{0\}$ und $h(0) = 0$. Die Funktion h ist messbar und eine Rechnung mit Polarkoordinaten zeigt

$$\|h\|_{p'}^{p'} = \int_B |h(x)|^{p'}\, \mathrm{d}x = \int_B |x|^{-\alpha p'}\, \mathrm{d}x = \omega_m \int_0^1 r^{-\alpha p' + m - 1}\, \mathrm{d}r < \infty,$$

da $-\alpha p' + m - 1 > -1$ ist. Die Funktion g ist als Produkt messbarer Funktionen auch messbar und die Höldersche Ungleichung zeigt nun

$$\int_B |g(x)|\, \mathrm{d}x = \|g\|_1 \le \|f\|_p \|h\|_{p'} < \infty,$$

d.h. die Funktion g ist integrierbar. □