Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
M.Sc. Jonathan Wunderlich

Lösungsvorschlag zur Modulprüfung Höhere Mathematik II (Analysis) für die Fachrichtung Informatik

Aufgabe 1:

(i) Es sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{2\left(\sqrt{1+|xy|}-1\right)^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Bestimmen Sie alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ in denen f stetig ist.

(ii) Es seien $D := \mathbb{R} \times (-1,1)$ und $g\colon D \to \mathbb{R}$, $g(x,y) := \arctan(x)y^2$. Zeigen Sie, dass g Lipschitz-stetig ist.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 1:

(i) *Behauptung:* f ist auf $\mathbb{R}^2$ stetig.

Beweis: Da $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ offen ist, ist f auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ als Verkettung stetiger Funktionen stetig. Es bleibt die Stetigkeit in $(0,0)$ zu prüfen. Für $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ gilt

$$\begin{aligned} |f(x,y) - f(0,0)| &= \left| \frac{2(\sqrt{1+|xy|}-1)^2}{x^2+y^2} \right| = \left| \frac{2(\sqrt{1+|xy|}-1)^2}{x^2+y^2} \cdot \frac{(\sqrt{1+|xy|}+1)^2}{(\sqrt{1+|xy|}+1)^2} \right| \\ &= \left| \frac{2(1+|xy|-1)^2}{(x^2+y^2)(\sqrt{1+|xy|}+1)^2} \right| = \frac{2|xy|^2}{(x^2+y^2)(\sqrt{1+|xy|}+1)^2} \\ &\leq \frac{|xy|}{(\sqrt{1+|xy|}+1)^2} \to 0 \quad ((x,y) \to (0,0)), \end{aligned}$$

wobei in der letzten Abschätzung die Ungleichung $\frac{2|xy|}{x^2+y^2} \leq 1$ verwendet wurde. Damit folgt $f(x,y) \to f(0,0)$ für $(x,y) \to (0,0)$ und somit ist f auch in $(0,0)$ stetig. Insgesamt ist f also stetig auf ganz $\mathbb{R}^2$. □

(ii) *Behauptung:* g ist Lipschitz-stetig.

Beweis: g ist differenzierbar auf D mit

$$g'(x,y) = \left(\frac{y^2}{1+x^2},\ 2y\arctan(x) \right).$$

Damit erhält man für alle $(x,y) \in D$ (Beachte: $|y| \leq 1$ und $|\arctan(x)| \leq \frac{\pi}{2}$):

$$\|g'(x,y)\|^2 = \frac{y^4}{(1+x^2)^2} + 4y^2\arctan(x)^2 \leq 1 + 4\frac{\pi^2}{4} = 1 + \pi^2$$

Es seien nun $a, b \in D$. Nach dem Mittelwertsatz existiert ein $\xi \in S[a,b] \subseteq D$ (da D konvex) mit $g(b) - g(a) = g(\xi) \cdot (b-a)$. Mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung folgt

$$|g(b) - g(a)| = |g(\xi) \cdot (b-a)| \leq \|g'(\xi)\| \|b-a\| \leq \sqrt{1+\pi^2}\|b-a\|,$$

d.h. g ist Lipschitz-stetig (mit Konstante $\sqrt{1+\pi^2}$). □

Aufgabe 2:

(i) Verbinden Sie die folgenden Aussagen mit logischen Beziehungen, indem Sie **eines** der folgenden Symbole $\Rightarrow$, $\Leftarrow$, $\Leftrightarrow$ oder den Text "keine Beziehung" in die Kästchen schreiben. Rechenwege und Begründungen werden nicht verlangt und nicht bewertet. Jedes Kästchen, welches die richtige Implikation enthält, wird mit +0,5 Punkten bewertet. Fehlt eine Implikation, gibt es für dieses Kästchen keinen Punkt.

Es seien $M := \{z \in \mathbb{C} \colon (\mathrm{Re}(z) - 2)^2 + \mathrm{Im}(z)^2 < 1\}$ und $z \in \mathbb{C}$.

$\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{e}^{nz}$ konvergiert absolut.	k.B.$^{1)}$	$z \in M$.

Es sei $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ partiell differenzierbar auf $\mathbb{R}^2$.

f ist stetig partiell differenzierbar in $(0,0)$.	$\Rightarrow^{2)}$	f ist stetig in $(0,0)$.

Es sei $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix}$ eine reelle Matrix.

Alle Eigenwerte von A sind strikt positiv.	$\Leftrightarrow^{3)}$	$\alpha > 0$, $\det A > 0$.

Es sei $B \subseteq \mathbb{R}^n$ abgeschlossen.

B ist kompakt	$\Leftarrow^{4)}$	$B \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n \colon \|x\| < 1\}$.

(ii) Es sei $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ schnell fallend und $\hat{f}$ deren Fouriertransformierte. Es gelte weiter $\hat{f}(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass f symmetrisch ist, d.h. es gilt $f(t) = f(-t)$ $(t \in \mathbb{R})$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 2:

(i) 1) Für $z \in M$ gilt $\mathrm{Re}(z) > 1$, d.h. $\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{e}^{nz}$ konvergiert nicht. Ist umgekehrt $z := -1 + \mathrm{i}$ so konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{e}^{nz}$ absolut (beachte $\mathrm{Re}(z) < 0$), aber $z \notin M$.

2) Nach der Vorlesung sind stetig partiell differenzierbare Funktionen differenzierbar und somit stetig. Die Funktion

$$f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin(\frac{1}{x^2+y^2}), & (x,y) \neq 0, \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

ist differenzierbar in $(0,0)$ (mit Ableitung $(0,0)$), also stetig in $(0,0)$, aber nicht stetig partiell differenzierbar in $(0,0)$.

3) Die Aussage folgt direkt aus Satz 18.9.

4) $B := \{x \in \mathbb{R}^n \colon \|x\| \leq 2\}$ ist kompakt, aber es gilt $B \not\subseteq \{x \in \mathbb{R}^n \colon \|x\| < 1\}$.
Ist umgekehrt $B \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n \colon \|x\| < 1\}$, so ist B beschränkt (und nach Voraussetzung abgeschlossen), also kompakt.

(ii) *Behauptung:* f ist symmetrisch.

Beweis: Da $\hat{f}$ reell-wertig ist, erhält man

$$\mathrm{Re}(\hat{f}(s)\mathrm{e}^{\mathrm{i}ts}) = \hat{f}(s)\cos(st) = \hat{f}(s)\cos(-st) = \mathrm{Re}(\hat{f}(s)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}st})$$

für alle $s, t \in \mathbb{R}$. Damit ergibt sich mit der inversen Fouriertransformation für alle $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f(t) = \mathrm{Re}(f(t)) &= \mathrm{Re}\left(\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(s)\mathrm{e}^{\mathrm{i}st}\,ds\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{Re}(\hat{f}(s)\mathrm{e}^{\mathrm{i}st})\,ds = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{Re}(\hat{f}(s)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}st}) \\ &= \mathrm{Re}\left(\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(s)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}st}\,ds\right) = \mathrm{Re}(f(-t)) = f(-t). \end{aligned}$$

□

Aufgabe 3:
Es sei $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$f(x, y, z) := (\sin(\cos(y))z + z^2 - 1,\ x^2\sin(y) - \mathrm{e}^{z^2-1} + 2y - \pi).$$

Zeigen Sie, dass $\delta, \eta > 0$ und eine stetig differenzierbare Funktion $g\colon U_\delta(1) \to U_\eta((\frac{\pi}{2}, 1))$ existieren mit $g(1) = (\frac{\pi}{2}, 1)$ und $f(x, g(x)) = 0$ $(x \in U_\delta(1))$. Berechnen Sie außerdem $g'(1)$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 3:
Behauptung: Es existieren $\delta, \eta > 0$ und eine stetig differenzierbare Funktion $g\colon U_\delta(1) \to U_\eta((\frac{\pi}{2}, 1))$ existieren mit $g(1) = (\frac{\pi}{2}, 1)$ und $f(x, g(x)) = 0$ $(x \in U_\delta(1))$.

Beweis: Es gilt $f(1, \frac{\pi}{2}, 1) = 0$. Außerdem ist f stetig differenzierbar nach der Kettenregel mit

$$f'(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 & -\cos(\cos(y))\sin(y)z & \sin(\cos(y)) + 2z \\ 2x\sin(y) & x^2\cos(y) + 2 & -2z\mathrm{e}^{z^2-1} \end{pmatrix}.$$

Weiter gilt

$$\frac{\partial f}{\partial(y, z)}(1, \tfrac{\pi}{2}, 1) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

und somit $\det\left(\frac{\partial f}{\partial(y,z)}(1, \frac{\pi}{2}, 1)\right) = 2 - 4 = -2 \neq 0$. Nach dem Satz über implizit definierte Funktionen existieren also $\delta, \eta > 0$ und eine stetig differenzierbare Funktion $g\colon U_\delta(1) \to U_\eta((\frac{\pi}{2}, 1))$ existieren mit $g(1) = (\frac{\pi}{2}, 1)$ und $f(x, g(x)) = 0$ $(x \in U_\delta(1))$. □

Behauptung: $g'(1) = (-2, -1)$

Beweis: Ebenfalls nach dem Satz über implizit definierte Funktionen ist g differenzierbar mit

$$g'(x) = -\left(\frac{\partial f}{\partial(y, z)}(x, g(x))\right)^{-1} \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(x, g(x)) \quad (x \in U_\delta(1)).$$

Mit $g(1) = (\frac{\pi}{2}, 1)$ folgt

$$g'(1) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

□

Aufgabe 4:
Schreiben Sie die gesuchten Ergebnisse in die dafür vorgesehenen Kästen. Es wird jeweils nur das Ergebnis im Kasten bewertet. Rechenwege und Begründungen werden nicht verlangt und nicht bewertet. Jede richtige Antwort wird mit +0,5 Punkten bewertet.

(i) Bestimmen Sie den folgenden Cauchyschen Hauptwert, falls dieser existiert:

$$CH-\int_{-\infty}^{\infty} x^2\sin(x)+\mathrm{e}^{-x^2}\,dx = \boxed{\sqrt{\pi}}.$$

(ii) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung von $y'(x) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot y(x)$:

$$y(x) = \boxed{c_1\mathrm{e}^x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2\mathrm{e}^x \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

(iii) Es sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) := -\cos(x^2+y^2)$. Bestimmen Sie die Hessematrix

$$H_f(x,y) = \boxed{\begin{pmatrix} 4x^2\cos(x^2+y^2)+2\sin(x^2+y^2) & 4xy\cos(x^2+y^2) \\ 4xy\cos(x^2+y^2) & 4y^2\cos(x^2+y^2)+2\sin(x^2+y^2) \end{pmatrix}}.$$

(iv) Es seien $M := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2+y^2+z^2 \leq 1,\ z \geq 0\right\}$ und $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) := z\mathrm{e}^{x^2+y^2}$. Berechnen Sie das folgende Integral:

$$\int_M f(x,y,z)\,d(x,y,z) = \boxed{\pi\left(\frac{\mathrm{e}}{2}-1\right)}.$$

(v) Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems $y''(x)-2y'(x)+y(x) = \cos(x)$, $y(0) = y'(0) = 1$:

$$y(x) = \boxed{-\frac{1}{2}\sin(x)+\mathrm{e}^x+\frac{1}{2}x\mathrm{e}^x} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

(vi) Es seien $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) := x\arctan(y)$ und $a := (1,0) \in \mathbb{R}^2$. Bestimmen Sie die Richtungsableitung

$$\frac{\partial f}{\partial a}(1,1) = \boxed{\frac{\pi}{4}}.$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 4:

(i) Nach der Vorlesung gilt $\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, also folgt $\int_{-\infty}^\infty \mathrm{e}^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$. Außerdem ist $x \mapsto x^2\sin(x)$ ungerade, d.h. es gilt $\int_{-R}^R x^2\sin(x)\,dx = 0$ für alle $R > 0$. Somit folgt $CH-\int_{-\infty}^\infty x^2\sin(x)+\mathrm{e}^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$.

(ii) Das Eigenwerte von $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sind $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = 1$. Der Eigenraum wird von $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ aufgespannt. $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ergänzt diese Basis zu einer Basis von $\mathbb{R}^2$.

Mit dem Algorithmus aus der Vorlesung erhält man somit zwei linear unabhängige Lösungen

$$y_1(x) = \mathrm{e}^x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad y_2(x) = \mathrm{e}^x \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x\begin{pmatrix} 1-1 & 1 \\ 0 & 1-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \mathrm{e}^x \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(iii) f ist zweimal differenzierbar auf ganz $\mathbb{R}^2$ mit 2. Ableitung

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 4x^2\cos(x^2+y^2)+2\sin(x^2+y^2) & 4xy\cos(x^2+y^2) \\ 4xy\cos(x^2+y^2) & 4y^2\cos(x^2+y^2)+2\sin(x^2+y^2) \end{pmatrix} \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

(iv) Mittels Kugelkoordinaten erhält man

$$(r\cos(\varphi)\cos(\theta),\ r\sin(\varphi)\cos(\theta),\ r\sin(\theta)) \in M \quad \Leftrightarrow \quad r \in [0,1],\ \varphi \in [0,2\pi],\ \theta \in [0,\tfrac{\pi}{2}].$$

Somit gilt

$$\begin{aligned}
\int_M f(x,y,z)\,d(x,y,z) &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} r\sin(\theta)\mathrm{e}^{r^2\cos^2(\theta)} r^2\cos(\theta)\,d\theta\,d\varphi\,dr \\
&= 2\pi \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^3 \sin(\theta)\cos(\theta)\mathrm{e}^{r^2\cos^2(\theta)}\,d\theta\,dr \\
&= 2\pi \int_0^1 -\frac{r}{2}\mathrm{e}^{r^2\cos^2(\theta)}\Big|_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}}\,dr = \pi \int_0^1 r\mathrm{e}^{r^2} - r\,dr = \pi\left(\frac{1}{2}\mathrm{e}^{r^2} - \frac{1}{2}r^2\Big|_{r=0}^{1}\right) \\
&= \pi\left(\frac{\mathrm{e}}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 0\right) = \pi\left(\frac{\mathrm{e}}{2} - 1\right).
\end{aligned}$$

(v) Die allgemeine Lösung des homogenen Problems lautet $y_h(x) = c_1\mathrm{e}^x + c_2 x\mathrm{e}^x$ mit Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Mit dem Ansatz aus der Vorlesung findet man eine spezielle Lösung $y_p(x) = -\frac{1}{2}\sin(x)$. Einsetzen der Anfangswerte ergibt die Lösung $y(x) = -\frac{1}{2}\sin(x) + \mathrm{e}^x + \frac{1}{2}x\mathrm{e}^x$ $(x \in \mathbb{R})$.

(vi) f ist differenzierbar mit $f'(x,y) = (\arctan(y), \frac{x}{1+y^2})$. Somit ergibt sich

$$\frac{\partial f}{\partial a}(1,1) = f'(1,1)\cdot(1,0) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}.$$