Lösungsvorschlag zur Modulprüfung Analysis I

15.03.2018

Aufgabe 1:
Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei rekursiv definiert durch

$$a_1 := 10, \qquad a_{n+1} := \frac{a_n^2+6}{2a_n-1} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

(i) Zeigen Sie, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach unten durch 3 beschränkt ist.

(ii) Zeigen Sie, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert und bestimmen Sie den Grenzwert.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 1:

(i) *Behauptung:* Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $a_n - 3 \geq 0$.

Beweis: Die Behauptung kann mittels vollständiger Induktion bewiesen werden.
IA: Nach Voraussetzung gilt $a_1 - 3 = 10 - 3 = 7 \geq 0$.
IV: Die Aussage gelte bereits für ein $n \in \mathbb{N}$, d.h. es gelte bereits $a_n - 3 \geq 0$.
IS ($n \rightsquigarrow n+1$): Nach Induktionsvoraussetzung ist insbesondere $a_n \geq 3 > \frac{1}{2}$ und damit $2a_n - 1 > 0$.
Weiter gilt

$$a_{n+1} - 3 = \frac{a_n^2+6}{2a_n-1} - 3 = \frac{a_n^2+6-6a_n+3}{2a_n-1} = \frac{a_n^2-6a_n+9}{2a_n-1} = \frac{(a_n-3)^2}{2a_n-1} \underset{\text{IV}}{\geq} 0$$

und damit $a_n \geq 3$ für alle $n \in \mathbb{N}$. □

(ii) *Behauptung:* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen 3.

Beweis: Zunächst gilt wegen Teil (i) $a_n + 2 \geq 3 + 2 = 5 \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Weiter gilt für $n \in \mathbb{N}$ (wieder mit (i))

$$a_n - a_{n+1} = a_n - \frac{a_n^2+6}{2a_n-1} = \frac{2a_n^2-a_n-a_n^2-6}{2a_n-1} = \frac{a_n^2-a_n-6}{2a_n-1} = \frac{(a_n+2)(a_n-3)}{2a_n-1} \geq 0,$$

also $a_n \geq a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Daher ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend und nach unten beschränkt und somit konvergent. Sei $a := \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Dann muss a die folgende Gleichung erfüllen

$$a = \frac{a^2+6}{2a-1} \quad\Leftrightarrow\quad a^2 - a - 6 = 0 \quad\Leftrightarrow\quad (a+2)(a-3) = 0,$$

also gilt (wegen (i)) $a = 3$. □

Aufgabe 2:

(i) Untersuchen Sie die folgende Reihe auf Konvergenz und absolute Konvergenz.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2n}}{\pi^{2n}(n!)^2}.$$

(ii) Bestimmen Sie sämtliche $x \in \mathbb{R}$, für die die folgende Potenzreihe konvergiert.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^{n+1}}(x-2)^{2n}.$$

Hinweis: Sie dürfen den folgenden Grenzwert ohne Beweis verwenden:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e}.$$

Außerdem dürfen Sie die folgende Abschätzung ohne Beweis verwenden:

$$n! \geq \frac{(n+1)^n}{e^n} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 2:

(i) *Behauptung:* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2n}}{\pi^{2n}(n!)^2}$ konvergiert (absolut).

Beweis: Es sei $a_n := \frac{n^{2n}}{\pi^{2n}(n!)^2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Damit erhält man

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(n+1)^{2(n+1)}}{\pi^{2(n+1)}((n+1)!)^2} \frac{\pi^{2n}(n!)^2}{n^{2n}} = \frac{1}{\pi^2}\left[\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\right]^2 \to \left(\frac{e}{\pi}\right)^2 < 1 \quad (n\to\infty).$$

Somit konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2n}}{\pi^{2n}(n!)^2}$ nach dem Quotientenkriterium (absolut). □

(ii) *Behauptung:* Die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^{n+1}}(x-2)^{2n}$ konvergiert für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x-2| < \sqrt{e}$ und divergiert für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x-2| \geq \sqrt{e}$.

Beweis: Für $k \in \mathbb{N}$ sei

$$a_k := \begin{cases} \frac{n!}{n^{n+1}}, & k = 2n,\ n \in \mathbb{N} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}.$$

Dann gilt $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^{n+1}}(x-2)^{2n} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(x-2)^k$. Für $k = 2n$ erhält man

$$\sqrt[k]{|a_k|} = \sqrt[2n]{\frac{n!}{n^{n+1}}} = \left(\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right)^{\frac{1}{2}} \to \frac{1}{\sqrt{e}} \quad (n\to\infty).$$

Damit erhält man den Konvergenzradius

$$r = \left(\limsup_{k\to\infty} |a_k|\right)^{-1} = \sqrt{e},$$

d.h. die Potenzreihe konvergiert absolut für $|x-2| < \sqrt{e}$ und divergiert für $|x-2| > \sqrt{e}$.
Für $x = 2 \pm \sqrt{e}$ erhält man die folgende Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! e^n}{n^{n+1}}$. Es gilt

$$\frac{n!e^n}{n^{n+1}} \geq \frac{(n+1)^n}{n^{n+1}} = \underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}_{\geq 1} \frac{1}{n} \geq \frac{1}{n} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Damit divergiert die Potenzreihe für $|x-2| = \sqrt{e}$ nach dem Minorantenkriterium. □

Aufgabe 3:
Die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei gegeben durch

$$f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_n(x) := e^{-nx^2}.$$

(i) Zeigen Sie, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise auf $\mathbb{R}$ konvergiert und geben Sie die Grenzfunktion an. Konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auch gleichmäßig?

(ii) Für $R \geq 0$ und $n \in \mathbb{N}$ sei $f_{n,R} := f_n|_{\mathbb{R}\setminus(-R,R)}$. Zeigen Sie die folgende Äquivalenz:

$$(f_{n,R})_{n\in\mathbb{N}} \text{ konvergiert gleichmäßig gegen } 0 \quad\Leftrightarrow\quad R > 0.$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 3:

(i) *Behauptung:* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert punktweise, aber nicht gleichmäßig gegen

$$f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x) := \begin{cases} 1, & x = 0 \\ 0, & x \neq 0 \end{cases}.$$

Beweis: Für $x = 0$ gilt $f_n(x) = e^{-nx^2} = e^0 = 1 \to 1$ $(n\to\infty)$ und für $x \neq 0$ gilt $f_n(x) = e^{-nx^2} \to 0$ $(n \to \infty)$. Daher konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise gegen

$$f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x) := \begin{cases} 1, & x = 0 \\ 0, & x \neq 0 \end{cases}.$$

Da die punktweise Grenzfunktion f unstetig ist, konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht gleichmäßig. $\square$

(ii) *Behauptung:* $(f_{n,R})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig gegen 0 genau dann, wenn $R > 0$.

Beweis: "$\Rightarrow$": Sei $R = 0$. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n := \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist eine Folge in $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Es gilt

$$f_{n,R}(x_n) - f(x_n) = e^{-n\frac{1}{n^2}} - 0 = e^{-\frac{1}{n}} \to 1 \quad (n\to\infty),$$

d.h. $(f_{n,R})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert nicht gleichmäßig.

"$\Leftarrow$": Sei nun $R > 0$ und $\varepsilon > 0$. Zu ε wähle $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $n_0 > \frac{-\log(\varepsilon)}{R^2}$. Dann gilt für alle $n \geq n_0$ und für alle $x \in \mathbb{R}\setminus[-R,R]$

$$|f_{n,R}(x) - f(x)| = \left|e^{-nx^2} - 0\right| = e^{-nx^2} \leq e^{-n_0R^2} < \varepsilon,$$

also konvergiert $(f_{n,R})_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen 0. $\square$

Aufgabe 4:
Zeigen Sie, dass die Ungleichung

$$\sin(y)e^y - \sin(x)e^x \geq (y-x)e^x\cos(y)$$

für alle $0 < x < y < \frac{\pi}{2}$ gilt.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 4:
Behauptung: Für $0 < x < y < \frac{\pi}{2}$ gilt $\sin(y)e^y - \sin(x)e^x \geq (y-x)e^x\cos(y)$.

Beweis: Die Funktion $f\colon (0,\frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$, $f(x) := \sin(x)e^x$ ist differenzierbar. Nach dem Mittelwertsatz existiert somit zu $0 < x < y < \frac{\pi}{2}$ ein $\xi \in (x,y)$ mit

$$\sin(y)e^y - \sin(x)e^x = f(y) - f(x) = (y-x)f'(\xi) = (y-x)(\cos(\xi) + \sin(\xi))e^\xi.$$

Es gilt $y - x > 0$ und $e^x > 0$. Außerdem sind $\sin(x)$ und e^x monoton wachsend, sowie $\cos(x)$ monoton fallend auf $(0,\frac{\pi}{2})$, d.h. es gilt $(\cos(\xi)+\sin(\xi))e^\xi \geq (\cos(y)+0)e^x$. Damit erhält man

$$\sin(y)e^y - \sin(x)e^x \geq (y-x)\cos(y)e^x.$$

$\square$

Aufgabe 5:
Bestimmen Sie sämtliche $\alpha,\beta > 0$ so, dass die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x) := \begin{cases} 2\sin(x), & x \in (-\infty,0] \\ \alpha\log(x+\beta), & x \in (0,\infty) \end{cases}$$

differenzierbar auf ganz $\mathbb{R}$ ist. Geben Sie außerdem die Ableitung f' an.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 5:
Behauptung: f ist differenzierbar genau dann, wenn $\alpha = 2$ und $\beta = 1$.

Beweis: Auf $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ ist f nach den Ableitungsregeln differenzierbar. Da 0 ein Häufungspunkt von $\mathbb{R}$ ist, ist f stetig auf ganz $\mathbb{R}$, genau dann wenn gilt

$$0 = f(0) = \lim_{x\to0-} f(x) \overset{!}{=} \lim_{x\to0+} f(x) = \alpha\log(\beta),$$

also genau dann, wenn $\log(\beta) = 0$. Somit ist f stetig, genau dann wenn $\beta = 1$, denn log ist streng monoton auf $(0,\infty)$.

Damit f differenzierbar ist, muss außerdem gelten

$$2 = \lim_{h\to0-}\frac{2\sin(h)}{h} = \lim_{h\to0-}\frac{f(h)-f(0)}{h} \overset{!}{=} \lim_{h\to0+}\frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to0+}\frac{\alpha\log(h+1)}{h} = \alpha,$$

also ist f genau dann differenzierbar, wenn $\alpha = 2$ (Beachte: Der letzte Grenzwert ist bekannt aus der Übung oder kann mit den Regeln von de l'Hospital begründet werden). Die gesuchte Ableitung von f lautet

$$f'\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f'(x) = \begin{cases} 2\cos(x), & x \in (-\infty,0] \\ \frac{2}{x+1}, & x \in (0,\infty) \end{cases}.$$

$\square$

Aufgabe 6:
Es sei $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ eine stetige und positive Funktion mit

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} f(x) = 0. \qquad (*)$$

(i) Beweisen Sie, dass f ein globales Maximum besitzt, d.h. es existiert ein $x_* \in \mathbb{R}$ mit $f(x) \leq f(x_*)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(ii) Nun sei f zusätzlich differenzierbar. Zeigen Sie, dass es $x_-, x_+ \in \mathbb{R}$ gibt mit $f'(x_-) < 0$ und $f'(x_+) > 0$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 6:

(i) *Behauptung:* f besitzt ein globales Maximum.

Beweis: Da $f > 0$ ist, gilt insbesondere $c := f(0) > 0$. Wegen Voraussetzung $(*)$ existiert ein $R > 0$ mit $f(x) = |f(x)| < \frac{c}{2}$ für alle $|x| > R$. Zudem ist $[-R,R]$ beschränkt und abgeschlossen. Wegen der Stetigkeit von f existiert also ein $x_* \in [-R,R]$ mit $f(x) \leq f(x_*)$ für alle $x \in [-R,R]$. Weiter gilt (wegen $0 \in [-R,R]$) $f(x_*) \geq f(0) = c$ und somit $f(x_*) \geq c > \frac{c}{2} > f(x)$ für alle $|x| > R$, d.h. f besitzt ein globales Maximum. $\square$

(ii) *Behauptung:* Es existieren $x_-, x_+ \in \mathbb{R}$ mit $f'(x_-) < 0$ und $f'(x_+) > 0$.

Beweis: Wähle ein $y_+ < -R$ und $y_- > R$. Dann gilt $f(y_+), f(y_-) < \frac{c}{2}$ und somit

$$\begin{aligned} f(x_*) - f(y_+) &> c - \frac{c}{2} > 0, \\ f(x_*) - f(y_-) &> c - \frac{c}{2} > 0, \\ x_* - y_+ &> -R + R = 0, \\ x_* - y_- &< R - R = 0. \end{aligned}$$

Nach dem Mittelwertsatz existieren $x_+, x_- \in \mathbb{R}$ mit

$$f(x_*) - f(y_+) = (x_* - y_+)f'(x_+) \quad \Leftrightarrow \quad f'(x_+) = \frac{f(x_*) - f(y_+)}{x_* - y_+} > 0,$$

$$f(x_*) - f(y_-) = (x_* - y_-)f'(x_-) \quad \Leftrightarrow \quad f'(x_-) = \frac{f(x_*) - f(y_-)}{x_* - y_-} < 0.$$

□

Aufgabe 7:
Es sei $n \in \mathbb{N}$. Berechnen Sie die folgenden Integrale.

(i) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\cos^3(x)\,dx$, (ii) $\displaystyle\int_0^1 e^{\sqrt{x}}\,dx$, (iii) $\displaystyle\int_1^{e^{\frac{1}{n+1}}} x^n \log(x)\,dx$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 7:

(i) _Behauptung:_ Es gilt $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\cos^3(x)\,dx = \frac{1}{4}$.

Beweis: Mit $g(x) := \cos(x)$ $(x \in [0, \frac{\pi}{2}])$ und $g'(x) = -\sin(x)$ erhält man

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\cos^3(x)\,dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} g'(x)g(x)^3\,dx = -\int_1^0 x^3\,dx = \frac{1}{4}.$$

□

(ii) _Behauptung:_ Es gilt $\int_0^1 e^{\sqrt{x}}\,dx = 2$

Beweis: Mittels Substitution und partieller Integration erhält man

$$\int_0^1 e^{\sqrt{x}}\,dx = \int_0^1 2ye^y\,dy = [2ye^y]_0^1 - \int_0^1 2e^y\,dy = 2e - [2e^y]_0^1 = 2e - (2e - 2) = 2.$$

□

(iii) _Behauptung:_ Es gilt $\int_1^{e^{\frac{1}{n+1}}} x^n \log(x)\,dx = \frac{1}{(n+1)^2}$.

Beweis: Mittels Substitution und partieller Integration erhält man

$$\begin{aligned}
\int_1^{e^{\frac{1}{n+1}}} x^n \log(x)dx &= \int_0^{\frac{1}{n+1}} e^{y(n+1)}y\,dy \\
&= \left[\frac{1}{n+1}e^{y(n+1)}y\right]_0^{\frac{1}{n+1}} - \frac{1}{n+1}\int_0^{\frac{1}{n+1}} e^{y(n+1)}\,dy \\
&= \frac{e}{(n+1)^2} - \frac{1}{(n+1)^2}\left[e^{y(n+1)}\right]_0^{\frac{1}{n+1}} \\
&= \frac{e}{(n+1)^2} - \frac{e}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^2} \\
&= \frac{1}{(n+1)^2}
\end{aligned}$$

□

Analysis 2 – Frühjahr 2018

Aufgabe 1 Sei $g : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ eine Funktion und es existiere $a = \lim_{t\to 0} g(t)$. Weiter sei $f(x,y) := xg\big(\sqrt{x^2+y^2}\big)$ für $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
Zeigen Sie, dass f in $(0,0)$ differenzierbar ist und $f'(0,0) = (a,0)$ gilt.

Lösung. Für $t \neq 0$ gelten

$$\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = \frac{tg(|t|)}{t} = g(|t|) \to a \quad \text{für } t \to 0$$

und

$$\frac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = 0.$$

Also ist f in $(0,0)$ partiell differenzierbar und es gilt $f_x(0,0) = a$ und $f_y(0,0) = 0$. Für $(x,y) \neq (0,0)$ gilt

$$\begin{aligned} q(x,y) &:= \frac{|f(x,y)-f(0,0)-xf_x(0,0)-yf_y(0,0)|}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ &= \frac{\big|xg\big(\sqrt{x^2+y^2}\big)-ax\big|}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x}{\|(x,y)\|}\big|g(\|(x,y)\|)-a\big| \\ &\leq \big|g(\|(x,y)\|)-a\big|. \end{aligned}$$

Somit gilt $0 \leq q(x,y) \leq \big|g(\|(x,y)\|)-a\big| \to 0$ für $(x,y) \to (0,0)$ wie behauptet. □

Aufgabe 2 Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x,y) = 2x^3 + 3e^{2y} - 6xe^y.$$

a) Bestimmen Sie alle lokalen Extrema von f.
b) Ist f nach unten beschränkt?
c) Ist f nach oben beschränkt?

Lösung. a) Die Funktion f ist zweimal stetig differenzierbar und es gilt

$$f'(x,y) = (6x^2-6e^y, 6e^{2y}-6xe^y)$$

sowie

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 12x & -6e^y \\ -6e^y & 12e^{2y}-6xe^y \end{pmatrix}$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Es gilt $f'(x,y) = (0,0)$ genau dann wenn $x^2 = e^y$ und $x = e^y$ gilt. Also ist notwendigerweise $x^2 = x$ und somit $x = 0$ oder $x = 1$. Da es für $e^y = 0$ keine Lösung gibt, ist die einzige kritische Stelle bei $(1,0)$. Die obige Rechnung zeigt

$$H_f(1,0) = \begin{pmatrix} 12 & -6 \\ -6 & 6 \end{pmatrix}.$$

Es gilt $\big(H_f(1,0)\big)_{11} = 12 > 0$ und $\det H_f(1,0) = 12\cdot 6 - 6\cdot 6 > 0$, also ist $H_f(1,0)$ positiv definit. Daher liegt in $(1,0)$ ein lokales Minimum vor.
b), c) Es gilt $f(x,0) = 2x^3 + 3 - 6x \to \pm\infty$ für $x \to \pm\infty$. Also ist f weder nach unten noch nach oben beschränkt. □

Aufgabe 3 Sei $K \subseteq \mathbb{R}^2$ kompakt, $K^\circ \neq \emptyset$, $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $f'(x,y) \neq 0$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
Zeigen Sie, dass es $(x_0,y_0) \in \partial K$ mit $f(x_0,y_0) \neq 0$ gibt.

Lösung. Angenommen es gelte $f(x,y) = 0$ für alle $(x,y) \in \partial K$. Da K kompakt ist, existieren $a,b \in K$ mit

$$f(a) \leq f(x,y) \leq f(b) \qquad \text{für alle } (x,y) \in K. \tag{$*$}$$

Wegen $f'(x,y) \neq 0$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ hat f keine lokalen Extremstellen und es folgt $a,b \in \partial K$. Nun gilt nach Annahme $f(a) = 0 = f(b)$ und damit folgt mit $(*)$, dass $f(x,y) = 0$ für alle $(x,y) \in K$ gilt. Insbesondere gilt $f'(x,y) = 0$ für alle $(x,y) \in K^\circ$, ein Widerspruch zur Annahme. Also ist die Annahme falsch und es folgt die Behauptung. □

Aufgabe 4 Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit $f(1) = 0$ und $f'(1) = 2$.
Zeigen Sie, dass es eine offene Umgebung von $(1,1)$ und eine stetig differenzierbare Funktion $g : U \to \mathbb{R}$ mit

$$g(1,1) = 1 \quad \text{und} \quad g(x,y) = x + yf\big(g(x,y)\big) \quad \text{für alle } (x,y) \in U.$$

Berechnen Sie $g'(1,1)$.

Lösung. Definiere $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ durch $F(x,y,z) = x + yf(z) - z$. Dann ist F stetig differenzierbar und es gilt $F(1,1,1) = 0$ sowie $F_z(x,y,z) = yf'(z) - 1$, also $F_z(1,1,1) = 2 - 1 = 1 \neq 0$. Der Satz über implizit definierte Funktionen liefert nun eine Umgebung U und eine Funktion $g : U \to \mathbb{R}$ wie behauptet.
Es gilt nun $g(x,y) = x + yf\big(g(x,y)\big)$ für alle $(x,y) \in U$. Es folgt

$$g_x(x,y) = 1 + yf'\big(g(x,y)\big)g_x(x,y)$$

und

$$g_y(x,y) = f\big(g(x,y)\big) + yf'\big(g(x,y)\big)g_y(x,y).$$

Also gilt insbesondere

$$g_x(1,1) = 1 + f'(1)g_x(1,1) = 1 + 2g_x(1,1)$$

und

$$g_y(1,1) = 2g_y(1,1).$$

Aus diesen Gleichungen folgt schließlich $g'(1,1) = (-1,0)$. □

Aufgabe 5 Für $f \in C[0,1]$ definiere

$$(Tf)(x) := 2 + \sin(x) \int_0^x \sqrt{t} f(t)\, dt, \qquad \text{für alle } x \in [0,1].$$

Zeigen Sie die folgenden Aussagen.
a) Für jedes $f \in C[0,1]$ gilt $Tf \in C[0,1]$.
b) Es gibt genau ein $f_0 \in C[0,1]$ mit $Tf_0 = f_0$.

Lösung. a) Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ist die Abbildung $x \mapsto \int_0^x \sqrt{t} f(t)\, dt$ für $x \in [0,1]$ eine stetige Funktion. Da Summe und Produkte von stetigen Funktionen wieder stetig sind, gilt $Tf \in C[0,1]$.
b) Seien $f, g \in C[0,1]$ und $x \in [0,1]$. Es gilt

$$\begin{aligned}
|Tf(x) - Tg(x)| &= \left|\sin(x) \int_0^x \sqrt{t}(f(t) - g(t))\, dt\right| \\
&\le |\sin(x)| \int_0^x \sqrt{t}\,|f(t) - g(t)|\, dt \\
&\le \|f - g\|_\infty \int_0^x \sqrt{t}\, dt \\
&\le \|f - g\|_\infty \int_0^1 \sqrt{t}\, dt \\
&= \frac{2}{3}\|f - g\|_\infty.
\end{aligned}$$

Bildet man nun das Supremum über $x \in [0,1]$, so sieht man $\|Tf - Tg\|_\infty \le \frac{2}{3}\|f - g\|_\infty$, d.h., T ist eine Kontraktion. Nach a) ist T zudem eine Selbstabbildung des vollständigen Raumes $C[0,1]$. Die Behauptung folgt somit aus dem Fixpunktsatz von Banach. □

Aufgabe 6 Der Weg $\gamma : [-\pi/2, \pi/2] \to \mathbb{R}^2$ sei gegeben durch

$$\gamma(t) = \left(e^t \sin(t), e^t \cos(t)\right).$$

a) Berechnen Sie die Weglänge $L(\gamma)$.
b) Berechnen Sie $\int_\gamma \frac{x}{x^2 + y^2}\, ds$.

Lösung. Der Weg γ ist stetig differenzierbar und es gilt

$$\gamma'(t) = e^t\left(\cos(t) - \sin(t), \sin(t) + \cos(t)\right)$$

sowie

$\|\gamma'(t)\| = e^t\left(\cos(t)^2 - 2\cos(t)\sin(t) + \sin(t)^2 + \sin(t)^2 + 2\sin(t)\cos(t) + \cos(t)^2\right) = \sqrt{2}e^t$ für alle $t \in [-\pi/2, \pi/2]$.

a) Also gilt

$$L(\gamma) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{2}e^t\, dt = \sqrt{2}\left(e^{\pi/2} - e^{-\pi/2}\right).$$

b) Ferner gilt

$$\int_\gamma \frac{x}{x^2 + y^2}\, ds = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{e^t \cos(t)}{e^{2t}\left(\cos(t)^2 + \sin(t)^2\right)} \sqrt{2}e^t\, dt = \sqrt{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(t)\, dt = 2\sqrt{2}. \quad \square$$

Aufgabe 7 Sei $y_0 \in \mathbb{R}$ und $y_0 \neq 0$. Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$y'(x) = x^2 y(x)^4, \qquad y(0) = y_0$$

und bestimmen Sie das maximale Existenzintervall dieser Lösung.

Lösung. Es ist $y'(x) = g(x)h(y(x))$, $y(0) = y_0$, wobei $g(s) = s^2$, $h(y) = y^4$ und $h(y_0) \neq 0$ ist. Da h stetig differenzierbar und somit lokal Lipschitz stetig ist, existiert nach dem Satz von Picard-Lindelöf eine eindeutige lokale Lösung des Anfangswertproblems. Der Satz über die Trennung der Variablen besagt ebenfalls, dass das Anfangswertproblem eine eindeutige lokale Lösung besitzt und er erlaubt zudem sie zu berechnen. Die Lösung y erfüllt für alle x im maximalen Existenzintervall die Gleichung

$$\int_{y_0}^{y(x)} \frac{dx}{x^4} = \int_0^x s^2\, ds.$$

Man erhält also

$$\frac{1}{y_0^3} - \frac{1}{y(x)^3} = x^3,$$

und somit

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{1}{y_0^3} - x^3}}.$$

Falls $y_0 > 0$, so ist das maximale Existenzintervall $\left(-\infty, \frac{1}{y_0}\right)$ und falls $y_0 < 0$, so ist das maximale Existenzintervall $\left(\frac{1}{y_0}, \infty\right)$. □

Lösungsvorschläge Analysis III Klausur Frühjahr 2018

Aufgabe 1

a) Seien $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $A_0 \in \mathcal{A}$. Beweisen Sie, dass

$$\nu : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}},\ A \mapsto \mu(A \cap A_0)$$

ein Maß auf $\mathcal{A}$ definiert.

b) Seien $X \neq \emptyset$ eine Menge, $B \subseteq X$ nichtleer und

$$\mathcal{M} := \{A \subseteq X \ :\ A \subseteq B \text{ oder } A^c \subseteq B\}.$$

Zeigen Sie, dass $\mathcal{M}$ eine σ-Algebra auf X ist.

Lösungsvorschlag Aufgabe 1

a) Zunächst ist ν wohldefiniert, da $A \cap A_0 \in \mathcal{A}$ für jedes $A \in \mathcal{A}$ ist, und es gilt $\nu(A) = \mu(A \cap A_0) \geq 0$ für alle $A \in \mathcal{A}$. Wir prüfen nun die Eigenschaften eines Maßes nach.

Es ist $\nu(\emptyset) = \mu(\emptyset \cap A_0) = \mu(\emptyset) = 0$, da μ ein Maß ist.

Weiter sei $(A_j)_j$ eine disjunkte Folge in $\mathcal{A}$. Dann ist die Folge $(A_j \cap A_0)_j$ ebenfalls disjunkt und wir schließen mit der Maßeigenschaft von μ

$$\nu\Big(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j\Big) = \mu\Big(\Big(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j\Big) \cap A_0\Big) = \mu\Big(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} \big(A_j \cap A_0\big)\Big) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j \cap A_0) = \sum_{j=1}^{\infty} \nu(A_j).$$

Insgesamt ist ν ein Maß auf $\mathcal{A}$.

b) Wir prüfen die Definition einer σ-Algebra nach.

(1) Es ist $X^c = \emptyset \subseteq B$ und damit $X \in \mathcal{M}$.

(2) Sei $A \in \mathcal{M}$. Dann gilt

$$A \subseteq B \text{ oder } A^c \subseteq B \iff (A^c)^c \subseteq B \text{ oder } A^c \subseteq B \iff A^c \in \mathcal{M}.$$

(3) Sei $(A_j)_j$ eine Folge in $\mathcal{M}$. Also gilt $A_j \subseteq B$ oder $A_j^c \subseteq B$ für jedes $j \in \mathbb{N}$. Wir unterscheiden zwei Fälle.

(I) Ist $A_j \subseteq B$ für alle $j \in \mathbb{N}$, so ist $\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j \subseteq B$, also auch $\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j \in \mathcal{M}$.

(II) Ist $A_j \not\subseteq B$ für ein $j \in \mathbb{N}$, so ist $A_j^c \subseteq B$, also $\left(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j\right)^c = \bigcap_{j\in\mathbb{N}} A_j^c \subseteq B$ und damit wieder $\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j \in \mathcal{M}$.

Insgesamt ist $\mathcal{M}$ eine σ-Algebra auf X.

Aufgabe 2

a) Seien $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine messbare Funktion, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$g(x) := \begin{cases} b & \text{falls } f(x) > b, \\ f(x) & \text{falls } a \leq f(x) \leq b, \\ a & \text{falls } f(x) < a. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass g messbar ist.

b) Gegeben sei $\mathcal{M} := \{\emptyset, \{3,5\}, \{4\}, \{3,4,5\}\}$. Dann ist $\mathcal{M}$ eine σ-Algebra auf $X = \{3,4,5\}$ (das dürfen Sie ohne Beweis verwenden). Weiter sei $f : X \to \mathbb{R}$, $x \mapsto (x-4)^2$.

Beweisen Sie, dass f $\mathcal{M}$-$\mathcal{B}_1$-messbar ist. Hierbei ist $\mathcal{B}_1 := \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Lösungsvorschlag Aufgabe 2

a) Da f messbar ist, sind die Mengen $\{f > b\}$, $\{a \leq f \leq b\}$ und $\{f < a\}$ in $\mathcal{B}_1$ enthalten. Weil g die Darstellung

$$g(x) = b\mathbb{1}_{\{f>b\}}(x) + f(x)\mathbb{1}_{\{a<f<b\}}(x) + a\mathbb{1}_{\{f<a\}}(x)$$

für $x \in \mathbb{R}$ besitzt, ist g als Produkt und Summe $\mathcal{B}_1$-$\mathcal{B}_1$-messbarer Funktionen $\mathcal{B}_1$-$\mathcal{B}_1$-messbar.

b) Es ist $f(x) = \mathbb{1}_{\{3,5\}}(x)$ für $x \in X$. Da die Menge $\{3,5\} \in \mathcal{M}$ ist, ist f damit $\mathcal{M}$-$\mathcal{B}_1$-messbar nach einem Beispiel aus der Vorlesung.

Wir weisen dies nun zusätzlich explizit nach. Sei dazu $A \in \mathcal{B}_1$. Wir unterscheiden vier Fälle.

(i) $A \cap \{0,1\} = \emptyset$. Dann ist $f^{-1}(A) = \emptyset \in \mathcal{M}$.

(ii) $A \cap \{0,1\} = \{0,1\}$. Dann ist $f^{-1}(A) = X \in \mathcal{M}$.

(iii) $A \cap \{0,1\} = \{0\}$. Dann ist $f^{-1}(A) = \{4\} \in \mathcal{M}$.

(iv) $A \cap \{0,1\} = \{1\}$. Dann ist $f^{-1}(A) = \{3,5\} \in \mathcal{M}$.

Aufgabe 3

a) Im Folgenden sei stets $d \in \mathbb{N}$ und $\mathcal{B}_d := \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ die Borelsche σ-Algebra auf $\mathbb{R}^d$. Weiter wird stets das Integral bezüglich des Lebesgue-Maßes betrachtet.

(a) Seien $X \in \mathcal{B}_d$, $n \in \mathbb{N}$, $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{B}(X)$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in [0, +\infty)$ und $f := \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mathbb{1}_{A_j}$ eine einfache Funktion in Normalform. Wie ist $\int_X f(x)\,\mathrm{d}x$ definiert?

(b) Sei $X \in \mathcal{B}_d$ und $f : X \to [0, +\infty]$ sei $\mathcal{B}(X) - \overline{\mathcal{B}}_1$-messbar. Wie ist $\int_X f(x)\,\mathrm{d}x$ definiert?

(c) X und f seien wie in (ii). Wann heißt f über X integrierbar?

b) Wie lautet der Konvergenzsatz von Lebesgue?

Lösungsvorschlag Aufgabe 3

Im Folgenden bezeichne λ_d stets das d-dimensionale Lebesguemaß auf $\mathcal{B}_d$.

a) (a) Man definiert

$$\int_X f(x)\,\mathrm{d}x := \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \lambda_d(A_j) \in [0,+\infty].$$

(b) Sei nun $f : X \to [0,+\infty]$ $\mathcal{B}(X)-\overline{\mathcal{B}}_1$ messbar. Dann gibt es nach Vorlesung eine monoton wachsende Folge $(f_n)_n$ positiver einfacher Funktionen, die auf X punktweise gegen f konvergiert. Man setzt dann

$$\int_X f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{n\to\infty} \int_X f_n(x)\,\mathrm{d}x,$$

wobei das Integral der einfachen Funktionen wiederum über die eindeutig gegebene Normalform wie in a) definiert ist.

(c) Die messbare nichtnegative Funktion f heißt genau dann über X integrierbar, wenn

$$\int_X f(x)\,\mathrm{d}x < \infty$$

ist.

b) Seien $X \in \mathcal{B}_d$ und $(f_n)_n$ eine Folge in $\mathcal{L}^1(X)$ mit den folgenden Eigenschaften. Die Folge $(f_n)_n$ konvergiere fast überall auf X und es gebe eine integrierbare Funktion $g : X \to [0,+\infty]$ mit

$$|f_n(x)| \le g(x)$$

für fast alle $x \in X$ und alle $n \in \mathbb{N}$. Dann existiert so eine integrierbare Funktion $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$, dass $(f_n)_n$ fast überall auf X gegen f konvergiert und

$$\int_X |f_n - f|\,\mathrm{d}x \to 0 \quad \text{sowie} \quad \int_X f_n\,\mathrm{d}x \to \int_X f\,\mathrm{d}x$$

für $n \to \infty$ gelten.

Aufgabe 4

Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte und begründen Sie Ihre Antwort jeweils.

a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \log\left(2 + \tfrac{1}{n}\cos(nx)\right) e^{-|x|}\,\mathrm{d}x$,

b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_1^n \cos\left(\frac{x}{n}\right) \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$.

$\int_1^\infty g(t)\,dt$

$\int_1^\infty g(t)\,dt < \infty$

$\int_1^\infty \left(\int_1^\infty e^{-tx^2}\,dx\right)dt = \int_1^\infty \left(\int_1^\infty e^{-tx^2}\,dt\right)dx$

$= \int_1^\infty \left[-\frac{1}{x^2} e^{-tx^2}\right]_0^\infty = \int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx < \infty$

Lösungsvorschlag Aufgabe 4

a) Wir definieren für $n \in \mathbb{N}$ die Funktion $f_n(x) := \log(2 + \frac{1}{n}\cos(nx))e^{-|x|}$, $x \in \mathbb{R}$. Als stetige Funktion ist f_n $\overline{\mathcal{B}}_1$-$\overline{\mathcal{B}}_1$-messbar. Weiter gilt für jedes $x \in \mathbb{R}$

$$f_n(x) = \log(2 + \underbrace{\tfrac{1}{n}\cos(nx)}_{\to 0,\ n\to\infty})e^{-|x|} \to \log(2)e^{-|x|} =: f(x)$$

für $n \to \infty$. f ist ebenfalls messbar als stetige Funktion. Weiter gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}$

$$|f_n(x)| = \log(2 + \tfrac{1}{n}\cos(nx))e^{-|x|} \le \log(3)e^{-|x|} =: g(x).$$

Wegen

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,\mathrm{d}x = \log(3)\left[\int_{-\infty}^{0} e^{x}\,\mathrm{d}x + \int_0^\infty e^{-x}\,\mathrm{d}x\right] = 2\log(3) < \infty$$

ist $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ (g ist als stetige Funktion ebenfalls messbar) und der Konvergenzsatz von Lebesgue liefert

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \log(2 + \tfrac{1}{n}\cos(nx))e^{-|x|}\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \log(2)e^{-|x|}\,\mathrm{d}x = 2\log(2).$$

b) Wir setzen $f_n : (1,\infty) \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \mathbb{1}_{(1,n)}(x)\cos\left(\frac{x}{n}\right)x^{-2}$. Dann ist f_n das Produkt zweier stetiger (also messbarer) Funktionen und einer Indikatorfunktion eines Intervalls (ebenfalls messbar), ist also messbar.
Zudem gilt für festes $x \in (1,\infty)$

$$f_n(x) \to \mathbb{1}_{(1,\infty)}(x)\cos(0)\,x^{-2} = x^{-2} =: f(x)$$

für $n \to \infty$, wobei f stetig, also messbar ist. Weiter ist $f_n \ge 0$, denn $f_n(x) = 0$ für $x \ge n$ und $f_n(x) > 0$ für $x \in (1,n)$, da $\cos\left(\frac{x}{n}\right) > \cos\left(\frac{n}{n}\right) = \cos(1) > 0$ (der Kosinus ist fallend auf $[0,\pi]$) und $x^{-2} > n^{-2} > 0$. Schließlich gilt $\cos\left(\frac{x}{n}\right) \le \cos\left(\frac{x}{n+1}\right)$ für $x \in (1,n)$ und somit

$$f_n(x) \le \mathbb{1}_{(1,n)}(x)\cos\left(\frac{x}{n+1}\right)x^{-2} \le \mathbb{1}_{(1,n+1)}(x)\cos\left(\frac{x}{n+1}\right)x^{-2} = f_{n+1}(x).$$

Mit dem Satz von Beppo Levi folgt

$$\lim_{n\to\infty} \int_1^n \cos\left(\frac{x}{n}\right)x^{-2}\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_1^\infty f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = [-\tfrac{1}{x}]_{x=1}^{\infty} = 1.$$

Alternativ lässt sich f auch als integrierbare Majorante für $|f_n|$ benutzen und das Ergebnis folgt aus dem Konvergenzsatz von Lebesgue.

Aufgabe 5

Gegeben sei die Funktion $g : (1,\infty) \to \mathbb{R}$, $t \mapsto \displaystyle\int_1^\infty e^{-tx^2}\,\mathrm{d}x$.

a) Zeigen Sie die Integrierbarkeit von g auf $(1,\infty)$.

b) Beweisen Sie, dass g auf $(1,\infty)$ differenzierbar ist.

$f(t,x) = e^{-tx^2}$

$|e^{-tx^2}|$

$= e^{-tx^2} \le h(t)$

$\forall x \ge 1\ \forall t \ge 1$

Lösungsvorschlag Aufgabe 5

a) Wir definieren $f : (1,\infty)^2 \to \mathbb{R}, f(x,t) = \mathrm{e}^{-tx^2}$. f ist stetig und positiv, womit g wohldefiniert und positiv ist, also ist das Integral über g wohldefiniert. Nach Fubini für nicht-negative Funktionen gilt

$$\begin{aligned}\int_1^\infty |g(t)|\,\mathrm{d}t &= \int_1^\infty \int_1^\infty f(x,t)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = \int_1^\infty \int_1^\infty f(x,t)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x = \int_1^\infty [-\frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{-tx^2}]_{t=1}^\infty\,\mathrm{d}x \\ &= \int_1^\infty \frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x \le \int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = 1 < \infty,\end{aligned}$$

also ist g integrierbar.

b) Aus der Vorlesung ist bekannt, dass die Funktion $x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2}$ integrierbar auf ganz $\mathbb{R}$ ist. Daher gilt dies auch auf $(1,\infty)$ und wegen $f(x,t) \le \mathrm{e}^{-x^2}$ für alle $t \in (1,\infty)$ ist $x \mapsto f(x,t)$ integrierbar für alle $t \in (1,\infty)$.
Alternativ folgt die Integrierbarkeit auch aus der Integrierbarkeit von g, woraus $g < \infty$ fast überall folgt. Da g in t fallend ist, folgt $g(t) < \infty$ für alle $t \in (1,\infty)$, was die Behauptung ist.
Die Abbildung $t \mapsto f(x,t)$ ist differenzierbar auf $(1,\infty)$ für alle $x \in (1,\infty)$ mit

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x,t) = -x^2\mathrm{e}^{-tx^2} \qquad \forall t \in (1,\infty).$$

Außerdem gilt

$$\left|\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\right| \le x^2\mathrm{e}^{-x^2} =: h(x) \qquad \forall t \in (1,\infty)$$

und h ist integrierbar, denn

$$\int_1^\infty h(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int_1^\infty x\cdot(-2x)\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x \overset{\text{P.I.}}{=} -\frac{1}{2}\underbrace{[x\mathrm{e}^{-x^2}]_{x=1}^\infty}_{=-\mathrm{e}^{-1}} + \frac{1}{2}\int_1^\infty \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x < \infty$$

Nach dem Differenzierbarkeitssatz folgt, dass g auf $(1,\infty)$ mit $g'(t) = -\int_1^\infty x^2\mathrm{e}^{-tx^2}\,\mathrm{d}x$, $t \in (1,\infty)$, differenzierbar ist.

Aufgabe 6

a) Sei A das Parallelogramm mit den Ecken $(0,0)$, $(1,0)$, $(2,1)$, $(1,1)$. Berechnen Sie das Integral $\int_A (\mathrm{e}^{-x} + y)\ \mathrm{d}(x,y)$.

b) Seien $B := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 < x^2+y^2 \le 1,\ z \in [0,1]\}$ und $f : B \to \mathbb{R},\ (x,y,z) \mapsto z\log(x^2+y^2)$.
Ist f auf B integrierbar? Begründen Sie Ihre Antwort.
Hinweis zu Teil b): Die Stammfunktion von $s \mapsto \log(s)$ ist $s \mapsto s\log(s) - s$.

Lösungsvorschlag Aufgabe 6

a) Der Integrand ist stetig auf $\mathbb{R}^2$ und nicht-negativ, solange $y \ge 0$ gilt, was in A der Fall ist. Deshalb existiert das Integral und wir können Fubini benutzen. A besteht aus den zwei Dreiecken mit Ecken $(0,0)$, $(1,0)$ und $(1,1)$ beziehungsweise $(1,0)$, $(1,1)$ und $(2,1)$. Somit gilt

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 1, 0 \le y \le x \text{ oder } 1 \le x \le 2, x-1 \le y \le 1\}$$

und es folgt

$$\begin{aligned}\int_A \mathrm{e}^{-x} + y\,\mathrm{d}(x,y) &= \int_{\mathbb{R}^2} (\mathrm{e}^{-x} + y)\mathbb{1}_A(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) \\ &= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} (\mathrm{e}^{-x} + y)(\mathbb{1}_{0\le x\le 1}(x)\mathbb{1}_{0\le y\le x}(x,y) + \mathbb{1}_{1<x\le 2}(x)\mathbb{1}_{x-1\le y\le 1}(x,y))\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1\int_0^x (\mathrm{e}^{-x} + y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + \int_1^2\int_{x-1}^1 (\mathrm{e}^{-x} + y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 [y\mathrm{e}^{-x} + \frac{1}{2}y^2]_{y=0}^x\,\mathrm{d}x + \int_1^2 [y\mathrm{e}^{-x} + \frac{1}{2}y^2]_{y=x-1}^1\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 x\mathrm{e}^{-x} + \frac{1}{2}x^2\,\mathrm{d}x + \int_1^2 (2-x)\mathrm{e}^{-x} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(x-1)^2\,\mathrm{d}x \\ &= [-(x+1)\mathrm{e}^{-x} + \frac{1}{6}x^3]_{x=0}^1 + [(x-1)\mathrm{e}^{-x} + \frac{1}{2}x - \frac{1}{6}(x-1)^3]_{x=1}^2 \\ &= -2\mathrm{e}^{-1} + \frac{1}{6} + 1 - 0 + \mathrm{e}^{-2} + 1 - \frac{1}{6} - 0 - \frac{1}{2} + 0 \\ &= \frac{3}{2} + \mathrm{e}^{-2} - 2\mathrm{e}^{-1}.\end{aligned}$$

Dabei haben wir benutzt, dass mit partieller Integration

$$\int \pm x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \mp x\mathrm{e}^{-x} \pm \int \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \mp(1+x)\mathrm{e}^{-x}.$$

Alternativ lässt sich A schreiben als

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le y \le 1, y \le x \le y+1\}$$

und somit

$$\begin{aligned}\int_A \mathrm{e}^{-x} + y\,\mathrm{d}(x,y) &= \int_0^1\int_y^{y+1} (\mathrm{e}^{-x} + y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 [-\mathrm{e}^{-x} + xy]_{x=y}^{y+1}\,\mathrm{d}y \\ &= \int_0^1 (-\mathrm{e}^{-y-1} + \mathrm{e}^{-y} + y)\,\mathrm{d}y \\ &= [\mathrm{e}^{-y-1} - \mathrm{e}^{-y} + \frac{1}{2}y^2]_{y=0}^1 = (\mathrm{e}^{-2} - \mathrm{e}^{-1} + \frac{1}{2}) - (\mathrm{e}^{-1} - 1 + 0) = \frac{3}{2} + \mathrm{e}^{-2} - 2\mathrm{e}^{-1}.\end{aligned}$$

b) Wir benutzen Zylinderkoordinaten Φ für den Transformationssatz und stellen fest, dass $\Phi(A) = B$ mit $A := (0,1] \times [0,2\pi] \times [0,1]$. Φ ist injektiv auf A° und f ist stetig auf B (also messbar), somit folgt mit Fubini für nicht-negative Funktionen

$$\int_B |f| \,\mathrm{d}(x,y,z) \overset{\text{Trafo}}{=} \int_A |f\circ\Phi| \cdot |\det \Phi'| \,\mathrm{d}(r,\phi,z) \overset{\text{Fub}}{=} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^1 z(-\log(r^2)) \cdot r \,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}z$$
$$= \left(\int_0^1 z\,\mathrm{d}z\right)\cdot\left(\int_0^{2\pi} 1\,\mathrm{d}\phi\right)\cdot\left(\int_0^1 -r\log(r^2)\,\mathrm{d}r\right)$$
$$\overset{\text{Hinweis}}{=} \frac{1}{2}\cdot 2\pi\frac{1}{2}\cdot[r^2 - \underbrace{r^2\log(r^2)}_{\to 0 (r\to 0)}]_0^1 = \frac{\pi}{2} < \infty.$$

Somit ist f integrierbar auf B (und analog $\int_B f\,\mathrm{d}(x,y,z) = -\frac{\pi}{2}$).

Aufgabe 7

a) Seien $f \in L^\infty((0,\infty)) \cap L^3((0,\infty))$ und $g : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)x^{-\frac{1}{4}}$.

Zeigen Sie, dass $g \in L^2((0,\infty))$ ist mit $\|g\|_2 \le C\left(\|f\|_\infty^2 + \|f\|_3^2\right)^{\frac{1}{2}}$, wobei $C > 0$ eine von f unabhängige Konstante ist.

b) Seien $f_n,\ f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ messbare Funktionen und für jede Menge $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ mit $\lambda_d(A) < \infty$ gelte $(f_n)|_A \to f|_A$ für $n \to \infty$ fast überall auf $\mathbb{R}^d$.

Folgern Sie, dass die Folge $(f_n)_n$ dann fast überall auf $\mathbb{R}^d$ gegen f konvergiert.

Lösungsvorschlag Aufgabe 7

a) Es gilt

$$\|g\|_2^2 = \int_0^\infty \frac{|f(x)|^2}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \underbrace{\int_0^1 \frac{|f(x)|^2}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x}_{=:I} + \underbrace{\int_1^\infty \frac{|f(x)|^2}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x}_{=:II}.$$

zu I: Da $f \in L^\infty((0,\infty))$, gilt $|f|^2 \in L^\infty((0,1))$ (mit $\||f|^2\|_\infty = \|f\|_\infty^2$)), zudem $(x \mapsto \sqrt{x}) \in L^1((0,1))$, somit folgt mit Hölder ($p = \infty$, $p' = 1$)

$$I \le \||f|^2\|_\infty \cdot \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \|f\|_\infty^2 \cdot [2\sqrt{x}]_{x=0}^1 = 2\|f\|_\infty^2 < \infty.$$

zu II: Da $f \in L^3((0,\infty))$, gilt $|f|^2 \in L^{\frac{3}{2}}((0,1))$, zudem $(x \mapsto \sqrt{x}) \in L^3((1,\infty))$, somit folgt mit Hölder ($p = \frac{3}{2}$, $p' = 3$)

$$II \le \||f|^2\|_{\frac{3}{2}} \cdot \left(\int_1^\infty \frac{1}{(\sqrt{x})^3}\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\int_0^\infty (|f|^2)^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{2}{3}} \cdot \left(\int_1^\infty x^{-\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{3}}$$
$$= \left(\int_0^\infty |f|^3\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{2}{3}} \cdot \left([-2x^{-\frac{1}{2}}]_{x=1}^\infty\right)^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{3}}\|f\|_3^2 < \infty.$$

Daher folgt $g \in L^2((0,\infty))$ mit

$$\|g\|_2 = (I + II)^{\frac{1}{2}} \le \left(2\|f\|_\infty^2 + \underbrace{2^{\frac{1}{3}}}_{\le 2}\|f\|_3^2\right)^{\frac{1}{2}} \le \sqrt{2}(\|f\|_\infty^2 + \|f\|_3^2)^{\frac{1}{2}}.$$

b) Wir setzen $A_n := U_n(0)$ (Kugel um 0 mit Radius n) für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt $A_n \in \mathfrak{B}_d$ und $\lambda_d(A_n) < \infty$, daher existiert nach Voraussetzung eine Nullmenge N_n, sodass

$$f_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} f(x) \qquad \forall x \in A_n \setminus N_n. \qquad (*)$$

Setze $N := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} N_n$, dann ist N nach Vorlesung eine Nullmenge. Sei nun $x \in \mathbb{R}^d \setminus N$, dann existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $x \in A_n$, zudem $x \notin N_n \subseteq N$. Somit folgt $f_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} f(x)$ nach $(*)$. Dies bedeutet $f_n \to f$ fast überall auf $\mathbb{R}^d$.