Name: Matrikelnummer: Punkte:

Aufgabe 1 [8 Punkte]

Sei $\mathcal{A} := \{A \subset \mathbb{R} : A \text{ abzählbar oder } A^c \text{ abzählbar}\}$ und

$$\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{R}, \quad \mu(A) := \begin{cases} 0, & A \text{ abzählbar} \\ 1, & A \text{ überabzählbar} \end{cases}, \quad A \in \mathcal{A}.$$

Zeigen Sie anhand der entsprechenden Definitionen, dass $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra ist und dass μ ein endliches Maß auf $\mathcal{A}$ ist.

Lösung:

a) $\mathcal{A}$ ist σ-Algebra. Es sind die definierenden Eigenschaften für σ-Algebren zu überprüfen.

(i) $\mathbb{R}^c = \emptyset$ ist abzählbar und damit $\mathbb{R} \in \mathcal{A}$.

(ii) Sei $A \in \mathcal{A}$. Dann gilt $A^c \in \mathcal{A}$, denn A^c oder $(A^c)^c = A$ ist abzählbar.

(iii) Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{A}$ und setze $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Sind alle A_n abzählbar, so auch A als abzählbare Vereinigung abzählbarer Mengen. Ist hingegen mindestens eine Menge A_{n_0} überabzählbar, so muss $A_{n_0}^c$ abzählbar sein und es gilt

$$A^c = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n^c \subset A_{n_0}^c \text{ abzählbar.}$$

Damit gilt $A \in \mathcal{A}$.

b) μ ist ein endliches Maß auf $\mathcal{A}$. Offenbar ist μ nichtnegativ, $\mu \geqslant 0$, und wegen $\mu(\mathbb{R}) = 1$ ist μ endlich (sogar normiert). Ferner gilt $\mu(\emptyset) = 0$.

Sei nun $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{A}$ eine Folge paarweise *disjunkter* Mengen aus $\mathcal{A}$.

(i) Sind alle der Mengen A_n abzählbar, so ist auch $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ abzählbar und es gilt

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = 0 = \sum_{n\in\mathbb{N}} 0 = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n).$$

(ii) Ist eine Menge A_{n_0} überabzählbar, ist $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ überabzählbar und damit

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = 1.$$

Andererseits ist $A_{n_0}^c$ abzählbar und wegen der paarweisen Disjunktheit der A_n, $n \in \mathbb{N}$, gilt $\bigcup_{n\neq n_0} A_n \subset A_{n_0}^c$ abzählbar, weshalb alle A_n für $n \neq n_0$ abzählbar sein müssen. Damit folgt aber

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) = \mu(A_{n_0}) + \sum_{n\neq n_0} \mu(A_n) = 1 + 0 = 1 = \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right).$$

Dies zeigt die σ-Additivität von μ.

Name: Matrikelnummer: Punkte:

Aufgabe 2 [2+2+2 Punkte]

Zeigen Sie die folgenden Aussagen mithilfe der Definition der Messbarkeit von Abbildungen und der Definition einer Lebesgue-Nullmenge:

a) Seien $f_1, f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ messbar, dann ist $h := \max\{f_1, f_2\}$ messbar.

b) Seien $g_n : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ Borel-messbare Abbildungen für jedes $n \in \mathbb{N}$. Dann ist

$$M := \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_n(x)}{n} < 1 \right\}$$

eine Borelmenge.

c) Jede abzählbare Teilmenge $N \subset \mathbb{R}^d$ mit $d \in \mathbb{N}$ ist eine Lebesgue-Nullmenge.

LÖSUNG:

a) Es ist $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $u(x, y) = \max(\{x, y\})$ messbar, da für jedes $a \in \mathbb{R}$ die Menge $I_a := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | g(x, y) \geqslant a\}$ eine Borel-Menge ist. Dies sieht man leicht, da

$$I_a = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x \geqslant a\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y \geqslant a\}.$$

Beide Mengen auf der rechten Seite sind abgeschlossen und damit Borelmengen. Desweiteren ist $\tau : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ mit $\tau(x) = (f_1(x), f_2(x))$ messbar, da eine Abbildung messbar ist genau dann wenn ihre Komponentenabbildungen messbar sind. Damit ist $h = u \circ \tau$ messbar als Verkettung messbarer Abbildungen.

b) Wir betrachten die Abbildung $g : \mathbb{R} \to [0, \infty]$ mit $g : x \mapsto \sum_n \frac{g_n(x)}{n}$. Die Abbildung g ist messbar als punktweiser Grenzwert messbarer Abbildungen. Da $[0, 1)$ eine Borelmenge ist folgt aus der Definition der Messbarkeit direkt $M = g^{-1}([0, 1))$ ist eine Borelmenge.

c) Wir zeigen zunächst, dass die einelementige Menge $M_x := \{x\}$ eine Lebesgue-Nullmenge ist. Da jede abzählbare Menge eine abzählbare Vereinigung einelementiger Mengen ist, folgt die Aussage dann direkt.
Nach der Translationsinvarianz des Lebesgue-Maßes gilt

$$\lambda^d(M_x) = \lambda^d(M_0) \leqslant \lambda^d \left(\left[\frac{-1}{n}, \frac{1}{n} \right]^d \right) = \left(\frac{2}{n} \right)^d \to 0 \text{ für } n \to \infty.$$

Name: Matrikelnummer: Punkte:

Aufgabe 3 **[4+4 Punkte]**

Sei $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine messbare Abbildung auf dem Maßraum $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \lambda^1)$ mit $\|u\|_1 = 1$. Es sei

$$A_n(z) := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | n^2 \leqslant (nx)^2 + y^2 \leqslant (n+z)^2\right\}$$

für $z \in [0,\infty)$ und $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

a) $\int_{A_n(z)} \left(x^2 + \left(\frac{y}{n}\right)^2\right)^{-1} d(x,y) = n2\pi \log\left(1 + \frac{z}{n}\right), \quad z \in [0,\infty)$ and $\forall\, n \in \mathbb{N}$,

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \int_{A_n(|u(t)|)} \left(x^2 + \left(\frac{y}{n}\right)^2\right) d(x,y)dt = 2\pi.$

Lösung:

a) Wir benutzen den Transformationssatz um das Integral zu lösen. Nach Vorlesung ist die Transformation $\Phi : [0, 2\pi) \times [0,\infty) \to \mathbb{R}^2$ mit

$$\Phi : (\varphi, r) \mapsto r(\cos[\varphi], n\sin[\varphi])$$

ein Diffeomorphismus für jedes $n \in \mathbb{N}$ (Ellipsen-Koordinaten). Alternativ skaliert man zunächst $y \to ny$ und benutzt dann ebene Polar-Koordinaten. Es gilt

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_{A_n(z)}(x,y)\left(x^2 + \left(\frac{y}{n}\right)^2\right)^{-1} d(x,y) &= \iint_{[0,2\pi)\times[0,\infty)} \mathbb{1}_{A_n(z)}(r(\cos[\varphi], n\sin[\varphi]))r^{-2}rnd(r,\varphi) \\ &= n\int_{[0,2\pi)}\int_{[1,1+\frac{z}{n})} r^{-1}drd\varphi = n2\pi\log\left(1+\frac{z}{n}\right).\end{aligned}$$

Hierbei wurde für die zweite Gleichheit der Satz von Tonelli verwendet. (Beachte der Integrand ist positiv).

b) Nach Aufgabenteil a) ist folgender Grenzwert zu bestimmen:

$$\lim_{n\to\infty} 2\pi \int_{\mathbb{R}} \underbrace{n\log\left(1 + \frac{|u(t)|}{n}\right)dt}_{=:f_n(t)}.$$

Zunächst ist klar, dass $f_n \to |u|$ für $n \to \infty$ punktweise konvergiert. f_n ist für jedes $n \in \mathbb{N}$ messbar. Außerdem ist $f_n \geqslant 0$ überall. Betrachte die Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $c_n = n\log\left(1 + \frac{a}{n}\right)$ für ein $a \geqslant 0$, dann ist

$$c_n = n\log\left(1+\frac{a}{y}\right) = \log\left(\left(1+\frac{a}{y}\right)^n\right), \text{ und } \left(1+\frac{a}{y}\right)^n \nearrow \exp[a] \text{ für } n \to \infty.$$

Es ist also $f_{n+1} \geqslant f_n$, da der Logarithmus monoton wachsend ist und damit folgt nach Beppo-Levi,

$$\lim_{n\to\infty} 2\pi \int_{\mathbb{R}} f_n(t)dt = 2\pi \int_{\mathbb{R}} |u(t)|dt = 2\pi.$$

Name: Matrikelnummer: Punkte:

Aufgabe 4 [3+3 Punkte]

Gegeben seien die Abbildungen $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $f_n(x) \coloneqq nx\exp[-nx^2]$. Beantworten Sie (und beweisen Sie Ihre Aussagen):

a) **(i)** Konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise in $[0,1]$?

(ii) Konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig in $[0,1]$?

b) Konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $L^1([0,1])$?

LÖSUNG:

a) Die Folge konvergiert punktweise. Die Grenzfunktion ist die Abbildung $f \equiv 0$. Am einfachsten Beweist man dies indem man die Abbildung
$g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ mit $g(t) \coloneqq tx\exp[-tx^2]$ für festes $x \in (0,1]$ betrachtet, denn

$$\lim_{t\to\infty} g(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{xt}{\exp[tx^2]} = \lim_{t\to\infty} \frac{x}{\exp[tx^2]x^2} = 0$$

Für $n \in \mathbb{N}$ ist $f_n(0) = 0$.

b) Die Folge konvergiert nicht gleichmäßig. Als Grenzfunktion kommt nach a) nur die konstante 0-Abbildung infrage. Es ist

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,1]} |f_n - f| = \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,1]} |f_n| \geqslant \lim_{n\to\infty} \exp[-n^{-1}] = 1.$$

wobei man für die Ungleichung $x = \frac{1}{n}$ wählt.

c) Die Folge konvergiert nicht in $L^1([0,1])$. Nach a) kommt nur die konstante 0-Abbildung in Frage. Es ist aber

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_1 = \lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]} |nx\exp[-nx^2]|dx &= \lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]} nx\exp[-nx^2]dx \\
&= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{\exp[-nx^2]}{-2}\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Nach Definition müsste allerdings $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n - f\|_1 = 0$ gelten.

Name: Matrikelnummer: Punkte:

Aufgabe 5 [8 Punkte]

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ eine kompakte Menge mit rein regulärem Rand und der äußeren Normale ν. Sei $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Folge von Vektorfeldern, sodass $p_n : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$p_n : (x_1, x_2) \mapsto \varrho_n(\|x\|)x_2\hat{e}_2,$$

wobei $\varrho_n : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ mit $\varrho_n(t) = \exp[-\lambda_n t]$ und $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ eine Folge mit $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = 0$. Zeigen Sie

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\partial\Omega} p_n \cdot \nu \, d\lambda^1 = |\Omega|.$$

Beachte: Es bezeichnet $\hat{e}_2$ den Einheitsvektor $(0,1)$, $\|\cdot\|$ die euklidsche Norm in $\mathbb{R}^2$ und $|\Omega|$ den Flächeninhalt von Ω. Die Menge Ω ist zulässig. Es gilt die Konvention $x = (x_1, x_2)$.

Lösung:
Da Ω rein regulären Rand hat und p_n für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld ist gilt nach dem Satz von Gauß

$$\int_{\partial\Omega} p_n \cdot \nu \, d\lambda^1 = \int_\Omega \operatorname{div}[p_n](x_1, x_2) \, d(x_1, x_2).$$

Die Divergenz des Vektorfeldes ist

$$\begin{aligned}\operatorname{div}[p_n](x_1, x_2) &= \partial_{x_2}\varrho_n(\|x\|)x_2 + \varrho_n(\|x\|) = \varrho_n'(\|x\|)\frac{x_2^2}{\|x\|} + \varrho_n(\|x\|) \\ &= \exp[-\lambda_n\|x\|]\left(1 - \frac{\lambda_n x_2^2}{\|x\|}\right) =: g_n(x)\end{aligned}$$

Die Abbildung $g_n(x)$ ist als stetige Abbildung messbar und konvergiert punktweise gegen 1 für $n \to \infty$. Für $\|x\| \neq 0$ gilt die punktweise Konvergenz nach den üblichen Grenzwertsätzen und für $\|x\| = 0$ ist $g_n(x) = 1$ für beliebiges $n \in \mathbb{N}$, denn

$$\left|\frac{x_2^2}{\|x\|}\right| \leqslant |x_2| \to 0 \quad \text{für } \|x\| \to 0.$$

Da Ω kompakt ist gilt $\Omega \subset B_R^2(0)$ und damit ist die Abbildung g_n beschränkt, denn

$$|g_n(x)| \leqslant 1 + \frac{|\lambda_n|x_2^2}{\|x\|} \leqslant 1 + \frac{|\lambda_n|(x_2^2 + x_1^2)}{\|x\|} = 1 + |\lambda_n|\|x\| \leqslant 1 + |\lambda_n|R$$

und damit ist $g_n < 1 + R$ für n groß genug. Die Funktion, welche konstant gleich $1 + R$ ist, ist auf der kompakten Menge Ω integrierbar und dominiert g_n für n groß genug. Nach dem Satz über die majorisierte Konvergenz (Lebesgue) gilt daher

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\partial\Omega} p_n \cdot \nu \, d\lambda^1 = \int_\Omega \lim_{n\to\infty} g_n \, d\lambda^2 = \int_\Omega 1 \, d\lambda^2 = |\Omega|.$$

Name: Matrikelnummer: Punkte:

Aufgabe 6 [6 Punkte]

Sei $X \subset \mathbb{R}^d$, $1 < p_1 < p_2 < \infty$ sowie $f \in L^{p_1}(X) \cap L^{p_2}(X)$. Zeigen Sie für $p \in [p_1, p_2]$ ist $f \in L^p(X)$.

LÖSUNG:
Für $p = p_1$ und $p = p_2$ ist nichts zu zeigen. Sei nun $p \in (p_1, p_2)$, dann existiert ein $\theta \in (0,1)$ mit $p = (1-\theta)p_1 + \theta p_2$. Wir betrachten die p-Norm von f,

$$\|f\|_p^p = \int |f|^p d\lambda^d = \int |f|^{(1-\theta)p_1} |f|^{\theta p_2} d\lambda^d = \| |f|^{(1-\theta)p_1} |f|^{\theta p_2} \|_1.$$

Nun lässt sich die Hölder-Ungleichung für duale koeffizienten $1 = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2}$ anwenden, sodass

$$\|f\|_p^p \leqslant \| |f|^{(1-\theta)p_1} \|_{q_1} \| |f|^{\theta p_2} \|_{q_2},$$

Wir wählen speziell $q_1 = (1-\theta)^{-1}$ und $q_2 = \theta^{-1}$ und damit gilt

$$\|f\|_p^p \leqslant \left(\int |f|^{p_1} d\lambda^d \right)^{1-\theta} \left(\int |f|^{p_2} d\lambda^d \right)^{\theta} = \|f\|_{p_1}^{(1-\theta)} \|f\|_{p_2}^{\theta} < \infty.$$