

5
 Lösungen Analysis II, Taire ~~10/20~~ 2020

Name: _____ Matrikelnummer: _____ Punkte:

Aufgabe 1:

(i) Entscheiden Sie ob die folgenden Integrale existieren. Falls ja, berechnen Sie den Wert des Integrals

a) $\int_0^{\infty} \frac{x}{x^2+1} dx,$ b) $\int_0^{\infty} \frac{1}{x^2+1} dx.$

(ii) Berechnen Sie das folgende Integral

$\int_0^{\pi} (4x + 5 + \cos(x))e^{2x^2+5x+\sin(x)} dx.$

Lösungsvorschlag:

(i) a) Das Integral existiert nicht, da

$\int_0^{\infty} \frac{x}{x^2+1} dx = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T \frac{x}{x^2+1} dx = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \ln(T^2+1) = \infty.$

b) Dieses Integral existiert und es gilt

$\int_0^{\infty} \frac{1}{x^2+1} dx = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T \frac{1}{x^2+1} dx = \lim_{T \rightarrow \infty} \arctan(T) = \frac{\pi}{2}.$

(ii) Definiere die Funktion

$F: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto e^{2x^2+5x+\sin(x)}.$

Nach der Kettenregel ist dann F stetig differenzierbar mit

$F'(x) = e^{2x^2+5x+\sin(x)} \cdot (4x + 5 + \cos(x))$

für alle $x \in [0, \pi]$. Mit dem Hauptsatz der Differential und Integralrechnung folgt dann:

$\int_0^{\pi} (4x+5+\cos(x))e^{2x^2+5x+\sin(x)} dx = \int_0^{\pi} F'(x) dx = F(\pi) - F(0) = e^{2\pi^2+5\pi+\sin(\pi)} - e^0 = e^{2\pi^2+5\pi} - 1.$

Name: _____ Matrikelnummer: _____ Punkte:

Aufgabe 2:

(i) Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Zeigen Sie, dass die Menge

$A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq f(x) \subseteq \mathbb{R}^2\}$
 abgeschlossen ist.

(ii) Untersuchen Sie die folgende Teilmenge von \mathbb{R}^2 auf Beschränktheit, Offenheit, Abgeschlossenheit und Kompaktheit.

$B := \{(a, b) \in \mathbb{N}^2 : \|(a, b)\| < 42\},$
 wobei $\|\cdot\|$ eine beliebige Norm auf \mathbb{R}^2 ist.

Lösungsvorschlag:

(i) Wenn A die leere Menge ist, dann ist A abgeschlossen. Sei A nicht leer und $(x_k, y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in A mit Grenzwert $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Es ist zu zeigen, dass (x, y) in A liegt, das heißt $0 \leq y \leq f(x)$.

Zunächst folgt aus $\|(x_k, y_k) - (x, y)\|_2 \rightarrow 0, (k \rightarrow \infty)$, dass

$x_k \rightarrow x, (k \rightarrow \infty)$ und $y_k \rightarrow y, (k \rightarrow \infty).$

Mit der Stetigkeit von f schließen wir weiter, dass $f(x_k) \rightarrow f(x)$ für $k \rightarrow \infty$. Da $(x_k, y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ zu A gehört, gilt $0 \leq y_k \leq f(x_k)$ für jedes $k \in \mathbb{N}$. Diese Ungleichung bleibt, wegen der Stetigkeit von f , im Grenzwert erhalten, also gilt $0 \leq y \leq f(x)$. \square

(ii) Da alle Normen auf \mathbb{R}^2 äquivalent sind ist es egal welche Norm wir verwenden. Wir wählen hier die 2-Norm. Ausserdem verwenden wir, dass $a = |a| \leq \|(a, b)\|_2$ und $b = |b| \leq \|(a, b)\|_2$. Somit folgt für $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ mit $\|(a, b)\|_2 < 42$, dass $0 < a, b < 42$. Das bedeutet, dass $B \subseteq \{1, \dots, 41\} \times \{1, \dots, 41\}$ eine endliche Menge ist. Als solche ist B beschränkt und abgeschlossen, also kompakt. Weiter ist B nicht leer, da zum Beispiel $(1, 1) \in B$. Jedoch ist für kein $\delta > 0$ die Umgebung $U_{\delta}(1, 1)$ in B enthalten und damit ist die Menge nicht offen.

Name: _____

Matrkelnummer: _____

Punkte:

Aufgabe 3:

(i) Zeigen Sie, dass durch $d(x, y) := \sqrt{|x-y|}$ eine Metrik auf \mathbb{R} definiert wird.

(ii) Sei (X, d) ein metrischer Raum. Zeigen Sie, dass der Abstand einer kompakten, nichtleeren Menge $K \subset X$ und einer dazu disjunkten Menge $\emptyset \neq A \subset X$ stets positiv ist.

Lösungsvorschlag:

(i) Die Symmetrieeigenschaft für $d(x, y)$ folgt direkt aus der Symmetrieeigenschaft des Betrages $|x - y| = |y - x|$.

Die Positivität von d , d.h. $d(x, y) \geq 0$, folgt direkt aus der Positivität der Betragsfunktion. Ebenso folgt aus der Definition von $d(x, y)$, genauer gesagt aus der Monotonie der Wurzelfunktion und der Positivität der Betragsfunktion, die folgenden Äquivalenzen

$$d(x, y) = 0 \iff \sqrt{|x-y|} = 0 \iff |x-y| = 0 \iff x = y.$$

• Bleibt noch die Dreiecksungleichung zu zeigen. Sei dafür $x, y, z \in \mathbb{R}$, dann gilt

$$\begin{aligned} d(x, y) &= \sqrt{|x-y|} = \sqrt{|x-z+z-y|} \leq \sqrt{|x-z|+|z-y|} \\ &\leq \sqrt{|x-z|} + \sqrt{|z-y|} \\ &= d(x, z) + d(z, y), \end{aligned}$$

wobei wir verwendet haben, dass $|x-z| \geq 0, |z-y| \geq 0$ und für $\sqrt{\cdot} : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ gilt, dass

$$\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b},$$

wie man sehr leicht durch quadrieren sieht.

Somit ist $d(x, y) = \sqrt{|x-y|}$ eine Metrik.

(ii) Sei $A \subset X$ abgeschlossen, $K \subset X$ kompakt und $A \cap K = \emptyset$. Angenommen, es gilt

$$d(A, K) = \inf\{d(a, b) : a \in A, b \in K\} = 0.$$

Dann gibt es eine Folge $(x_k)_k$ in K mit $d(x_k, A) \rightarrow 0$. Da K (folgen-)kompakt ist, gibt es eine in K konvergente Teilfolge $(x_{k_j})_j$. Sei der Grenzwert gegeben durch

$$\xi := \lim_{j \rightarrow \infty} x_{k_j}.$$

Da die Abstandsfunktion stetig ist folgt also auch $d(\xi, A) = 0$. Aber $\xi \in K$ und daher $\xi \in X \setminus A$. Das Komplement $X \setminus A$ ist offen, also gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(\xi) \cap A = \emptyset$. Dann muss aber für alle $a \in A$ der Abstand $d(\xi, a) \geq \varepsilon$ und somit $d(\xi, A) \geq \varepsilon$ sein. ζ
Also war die Annahme falsch und damit ist die Behauptung bewiesen.

6

Name: _____

Matrkelnummer: _____

Punkte:

Aufgabe 4:

Untersuchen Sie die Funktion $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$h(x) := \begin{cases} \frac{\sin(x_1) \sin(x_2)}{x_1^2 + x_2^2}, & \text{für } x = (x_1, x_2) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{für } x = (0, 0). \end{cases}$$

im Punkt $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$ auf:

(i) Stetigkeit,

(ii) partielle Differenzierbarkeit,

(iii) Differenzierbarkeit.

Lösungsvorschlag:

(i) Betrachte eine Folge $x = (x_k)_k \in \mathbb{R}^2$ mit $x_k = (x_1, x_2)_k, x_1 = x_2 = y$ und $x \rightarrow 0$ für $k \rightarrow \infty$. Dann gilt

$$\lim_{(x_1, x_2) \rightarrow 0} \frac{\sin(x_1) \sin(x_2)}{x_1^2 + x_2^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \left(\frac{\sin(y)}{y} \right)^2 = \frac{1}{2} \cdot 1 \neq 0$$

Somit ist f bei 0 nicht stetig.

(ii) Für die partielle Ableitung in x_1 -Richtung erhalten wir per Definition der partiellen Ableitung

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left(\frac{\sin(t) \sin(0)}{t^2 + 0^2} - 0 \right) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(t) \cdot 0}{t^3} = 0.$$

Die Ableitung in x_2 -Richtung funktioniert analog.

(iii) Da f nicht stetig ist, kann es nicht differenzierbar sein.

Name: _____ Matrkelnummer: _____ Punkte:

Aufgabe 5:

Es sei $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{falls } 0 < y < x^2, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie:

- (i) alle Richtungsableitungen von f existieren in $(0, 0)$.
- (ii) f ist nicht stetig in $(0, 0)$.

Lösungsvorschlag:

- (i) Sei $\vec{v} := (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$. Falls $v_2 > 0$ existiert ein $t_0 > 0$ so dass $v_2 > t_0 v_1^2$. Somit gilt $t_0 v_2 > (t_1 v_1)^2$,

und damit $f(tv_1, tv_2) = 0$ für alle $0 < t \leq t_0$.
 Falls $v_2 \leq 0$ folgt per Definition $f(tv_1, tv_2) = 0$ für alle $t > 0$.
 Also erhalten wir für beliebiges $v \in \mathbb{R}^2$,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+tv) - f(0)}{h} = \frac{0}{h} = 0.$$

Somit existieren alle Richtungsableitungen von f in $(0, 0)$. □

- (ii) Wir betrachten die Nullfolgen $(0, \frac{1}{n})$ und $(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2})$, dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$,

$$f(0, \frac{1}{n}) = 0, \quad \text{und} \quad f(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}) = 1.$$

Also ist f nicht stetig in $(0, 0)$. □

7

Name: _____ Matrkelnummer: _____ Punkte:

Aufgabe 6:

Sei $D := [0, 5] \times [0, 2]$ und

$$g: D \rightarrow \mathbb{R}; \quad g(u, v) = \frac{1}{2}u^4 - u^2v^2 + 54v - 9.$$

- (i) Zeigen Sie, dass es Punkte $x_1, x_2 \in D$ gibt so, dass $g(x_1) = \min_{x \in D} g(x)$ und $g(x_2) = \max_{x \in D} g(x)$.
- (ii) Zeigen Sie weiter, dass x_1, x_2 auf dem Rand von D liegen.

Lösungsvorschlag: Die Funktion g ist offensichtlich auf $D = [0, 5] \times [0, 2]$ stetig.

- (i) Weil ihr Definitionsbereich D beschränkt und abgeschlossen und somit kompakt ist, folgt aus der Vorlesung, dass g sein Minimum und Maximum annimmt. Es gibt also die gesuchten Punkte $x_1, x_2 \in D$.

- (ii) Als Polynom ist g beliebig oft differenzierbar auf $(0, 5) \times (0, 2)$. Läge x_j in $(0, 5) \times (0, 2)$ für $j = 1$ oder $j = 2$, dann würde gelten $g'(x_j) = 0$. Wir berechnen leicht, dass

$$\partial_1 g(u, v) = 2u^3 - 2uv^2 = 2u(u^2 - v^2) \quad \text{und} \quad \partial_2 g(u, v) = -2u^2v + 54.$$

Offenbar gilt

$$\begin{aligned} \partial_1 g(u, v) = 0 &\iff u = 0 \text{ oder } (u \neq 0 \text{ und } u^2 = v^2) \\ &\iff u = 0 \text{ oder } (u \neq 0 \text{ und } v = u) \text{ oder } (u \neq 0 \text{ und } v = -u). \end{aligned}$$

Diese Bedingungen setzen wir in $\partial_2 g(u, v)$ ein. Für alle $v \in (0, 2)$ ist $\partial_2 g(0, v) = 54 \neq 0$ und damit hat g in $(0, v)$ kein Extremum. Weiter haben wir

$$\partial_2 g(u, u) = -2u^3 + 54 = 0 \iff u = \sqrt[3]{\frac{54}{2}} = 3$$

und

$$\partial_2 g(u, -u) = 2u^3 + 54 = 0 \iff u = \sqrt[3]{-\frac{54}{2}} = -3.$$

Das zeigt, dass g keine stationären Punkte hat, denn $(3, 3)$ und $(-3, 3)$ liegen nicht im Definitionsbereich von g . Es folgt, dass g Minimum und Maximum auf dem Rand annehmen muss.

Name:

Matrikelnummer:

Punkte:

Aufgabe 7.

- (i) Zeigen Sie, dass sich die Gleichung $x + y + z = \sin(xyz)$ in einer Umgebung V von $(0, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$ eindeutig nach z auflösen lässt. D.h. auf einer geeigneten Umgebung U von $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$ existiert eine Funktion u mit der Eigenschaft, dass

$$\{(x, y, u(x, y)) : (x, y) \in U\}$$

die Lösungsmenge obiger Gleichung in V darstellt.

- (ii) Berechnen Sie die partiellen Ableitungen von u an der Stelle $(0, 0)$.

Lösungsvorschlag:

- (i) Wir benötigen von der Funktion $f(x, y, z) = x + y + z - \sin(xyz)$ die partiellen Ableitungen

$$D_p f = \begin{pmatrix} 1 - yz \sin(xyz) \\ 1 - xz \sin(xyz) \\ 1 - xy \sin(xyz) \end{pmatrix}.$$

Um den Satz über implizite Funktionen anwenden zu können muss die Ableitung bzgl. z ungleich 0 sein. Für $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ gilt $1 - xy \sin(xyz) = 1$. Also existiert in eine Umgebung U von $(0, 0)$ eine Funktion u mit der Eigenschaft, dass

$$\{(x, y, u(x, y)) : (x, y) \in U\}$$

die Lösungsmenge der Gleichung $x + y + z = \sin(xyz)$ in V darstellt

□

- (ii) Nach dem Satz über implizite Funktionen ergibt sich für die Ableitung von u

$$D_{(0,0)} u = - \left(\frac{\partial f}{\partial z} (0, 0, u(0, 0)) \right)^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} (0, 0, u(0, 0)) = -1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$