Institut für Analysis
Prof. Dr. Dirk Hundertmark
Dr. Markus Lange

SoSe 2019
23.04.2019

Analysis 2

Aufgabenzettel 1

Aufgabe 1:
Untersuchen Sie die angegebenen Funktionenfolgen auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz.

(i) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $f_n : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ definiert durch $f_n(x) := \frac{nx^2}{1+n^2x^4}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(ii) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ definiert durch $f_n(x) := \sqrt[n]{n^2x}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(iii) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $f_n : [a,1] \to \mathbb{R}$ definiert durch $f_n(x) := nx(1-x)^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ für ein $a \in (0,1)$.

Aufgabe 2:
Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte.

(i) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(\sin x)}{x}$

(ii) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^x - x}{1-x+\ln x}$

(iii) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2+x\ln x}{x^3+1}$

(iv) $\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{a}{x}\right)^x$, wobei $a \in (0,\infty)$ sei.

Aufgabe 3:

(i) Berechnen Sie $\tan(1/10)$ näherungsweise mit Hilfe des Taylorpolynoms $T_{3,0}\tan$. Zeigen Sie auch, dass der Fehler kleiner als $\frac{10}{3}\cdot 10^{-4}$ ist.

(ii) Sei $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ein Polynome 3. Grades mit

$$p(1) = -1, \quad p'(1) = 0, \quad p''(1) = 2, \quad p'''(1) = -12$$

Stellen Sie die Taylorpolynome $T_2[p,2]$, $T_3[p,2]$, $T_5[p,2]$ von p im Entwicklungspunkt $x_0 = 2$ auf.

— **Bitte wenden!** —

Aufgabe 4:
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

(i) Beweisen Sie $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ (d.h. f ist unendlich oft differenzierbar auf $\mathbb{R}$) und berechnen Sie $f^{(n)}(0)$ für jedes $n \in \mathbb{N}_0$.

(ii) Stellen Sie die Taylorreihe von f um $x_0 = 0$ auf. Bestimmen Sie ihren Konvergenzradius und zeigen Sie, das diese Taylorreihe in keiner Umgebung von 0 mit f übereinstimmt.

Hinweis zu (a): Zeigen Sie $p(1/x)f(x) \to 0$ für $x \to 0$ für jedes Polynom p und ferner für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ die Existenz eines Polynoms p_n mit $f^{(n)}(x) = p_n(1/x)f(x)$ für $x \neq 0$.

Aufgabe 5: Sei $n \in \mathbb{N}$ und $f \in C^n(\mathbb{R})$ (d.h. f ist n-mal differenzierbar $\mathbb{R}$ und alle diese Ableitungen sind stetig) sowie $x_0 \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie die Existenz einer Funktion $r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit den Eigenschaften

$$f(x_0 + h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} h^k + r(h)$$

für alle $h \in \mathbb{R}$ und

$$\lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{h^n} = 0.$$