Institut für Analysis
Prof. Dr. Dirk Hundertmark
Dr. Markus Lange

SoSe 2019
26.06.2019

Analysis 2

Aufgabenzettel 10

Abgabe bis 03. Juli 2019, 10:00 Uhr

Erinnerung: Die Anmeldung für den Übungsschein ist nun möglich. Anmeldeschluss ist der 26.07.2019. Für die Fachrichtungen Mathematik-Bachelor, Mathematik-Lehramt und Informatik ist der Übungsschein Voraussetzung für die Anmeldung zur Prüfung Analysis II.

Aufgabe 46: (K)

(i) Sei $g : \underbrace{\mathbb{R}^m \times \ldots \times \mathbb{R}^m}_{\text{k-mal}} \to \mathbb{R}$ eine k-linear Funktion und sei $a_j : (a,b) \to \mathbb{R}^m$, $j = 1, \ldots, k$, $a, b \in \mathbb{R}$ differenzierbar. Berechnen Sie

$$\frac{d}{dt} g(a_1(t), \ldots, a_k(t)) \,.$$

Hinweis: Benutzen Sie die k-Linearität von g und schreiben Sie $g(x+h)$ für $x, h \in \mathbb{R}^m \times \ldots \times \mathbb{R}^m$ in geeigneter Art und Weise.

(ii) Sei $B : (a,b) \to \mathbb{R}^{m\times m}$, $B(t) = (b_1(t), \ldots, b_m(t))$ eine Matrix wobei $b_j(t) \in C^1((a,b), \mathbb{R}^m)$, $j = 1, \ldots, m$, $a, b \in \mathbb{R}$. Berechnen Sie

$$\frac{d}{dt} \det(B(t)) \,.$$

Hinweis: Die Determinante ist eine multilineare Funktion.

Lösungsvorschlag:

(i) Sei $g : \underbrace{\mathbb{R}^m \times \ldots \times \mathbb{R}^m}_{\text{k-mal}} \to \mathbb{R}$ eine k-linear Funktion und sei $a_j : (a,b) \to \mathbb{R}^m$, $j = 1, \ldots, k$, $a, b \in \mathbb{R}$ differenzierbar. Wie im Hinweis angegeben betrachten wir $g(x+h)$ für $x, h \in \mathbb{R}^m \times \ldots \times \mathbb{R}^m$. Sei also $y = x + h$, dann gilt

$$\begin{aligned} g(y) &= g(y_1, y_2, \ldots, y_k) \\ &= g(x_1, y_2, \ldots, y_k) + g(h_1, y_2, \ldots, y_k) \\ &= g(x_1, x_2, y_3, \ldots, y_k) + g(x_1, h_2, y_3, \ldots, y_k) + g(h_1, y_2, \ldots, y_k) \\ &= \ldots \\ &= g(x_1, x_2, \ldots, x_k) + \sum_{j=1}^{k} g(x_1, \ldots, x_{j-1}, h_j, y_{j+1}, \ldots, y_k) \,, \end{aligned}$$

wobei wir die k-Linearität von g ausgenutzt haben. Nun betrachten wir die einzelnen Terme der Summe genauer. Jeder dieser Terme ist eine $(k-j)$-lineare Abbildung der Form

$$(z_{j+1}, \ldots, z_k) \mapsto g(x_1, \ldots, x_{j-1}, h_j, z_{j+1}, \ldots, z_k)$$

— Bitte wenden! —

für $z_j \in \mathbb{R}^m$. Somit können wir wie oben die $(k-j)$-Linearität ausnutzen und erhalten

$$
\begin{aligned}
&g(x_1, \ldots, x_{j-1}, h_j, y_{j+1}, \ldots, y_k) \\
&\qquad = g(x_1, \ldots, x_{j-1}, h_j, x_{j+1}, \ldots, x_k) + \sum_{l=1}^{k-j} g(x_1, \ldots, x_{j-1}, h_j, x_{j+1}, \ldots, x_{j+l-1}, h_{j+l}, y_{j+l+1}, \ldots, y_k)\,.
\end{aligned}
$$

Sei nun $A_x : \underbrace{\mathbb{R}^m \times \ldots \times \mathbb{R}^m}_{\text{k-mal}} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$
(h_1, \cdots, h_k) \mapsto \sum_{j=1}^{k} g(x_1, \ldots, x_{j-1}, h_j, x_{j+1}, \ldots, x_k)\,.
$$

Die Abbildung $x \mapsto A_x$ ist linear und stetig (siehe Übung). Weiter gilt für $y = x + h \in \mathbb{R}^m \times \ldots \times \mathbb{R}^m$ nach dem oben gezeigten, dass

$$
g(y) - g(x) = A_x(h) + \underbrace{\sum_{j=1}^{k} \sum_{l=1}^{k-j} g(x_1, \ldots, x_{j-1}, h_j, x_{j+1}, \ldots, x_{j+l-1}, h_{j+l}, y_{j+l+1}, \ldots, y_k)}_{=:r(x,h)}\,.
$$

Da die k-lineare Abbildung g stetig ist und die folgende Ungleichung erfüllt (siehe Übung)

$$
\|g(x_1, \ldots, x_k)\| \le \|g\| \prod_{j=1}^{k} \|x_j\| \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^m \times \ldots \times \mathbb{R}^m
$$

folgt, dass

$$
\begin{aligned}
\|r(x,h)\| &\le \sum_{j=1}^{k} \sum_{l=1}^{k-j} \|g\| \|x_1\| \cdots \|x_{j-1}\| \|h_j\| \|x_{j+1}\| \cdots \|x_{j+l-1}\| \|h_{j+l}\| \|y_{j+l+1}\| \cdots \|y_k\| \\
&\le C\|h\|^2
\end{aligned}
$$

Aus der Definition der Ableitung folgt somit, dass

$$
A_x(h) = \sum_{j=1}^{k} g(x_1, \ldots, x_{j-1}, h_j, x_{j+1}, \ldots, x_k) = Dg(x_1, \ldots, x_k)[h_1, \ldots, h_k] = Dg[h]\,.
$$

Wir erhalten also mit der Kettenregel

$$
\frac{d}{dt} g(a_1(t), \ldots, a_k(t)) = \sum_{j=1}^{k} g(a_1(t), \ldots, a_{j-1}(t), a_j'(t), a_{j+1}(t), \ldots, a_k(t))
$$

da $a_j : (a,b) \to \mathbb{R}^m$ per Voraussetzung differenzierbar ist und $a_j'(t) \in \mathbb{R}^m$ für alle $j \in \{1, \ldots, k\}$.

(ii) Für $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{R}^m$ mit $a_j = (a_j^1, \ldots, a_j^m)$ sei

$$
[a_1, \ldots, a_m] := [a_j^l] \in \mathbb{R}^{m \times m}\,,
$$

die quadratische Matrix mit den Spaltenvektoren a_j für $1 \le j \le m$. Dann ist die Abbildung

$$
\det : \underbrace{\mathbb{R}^m \times \cdots \times \mathbb{R}^m}_{\text{m-mal}} \to \mathbb{R}\,;\ (a_1, \ldots, a_m) \mapsto \det[a_1, \ldots, a_m]
$$

eine wohldefinierte m-lineare Abbildung wie man sofort anhand der bekannten Formel

$$\det[a_j^l] = \sum_{\sigma \in S_m} \operatorname{sgn}(\sigma)\, a^1_{\sigma(1)} \cdots a^m_{\sigma(m)}$$

sieht. Sei nun für $a, b \in \mathbb{R}$ eine Matrix $B : (a,b) \to \mathbb{R}^{m\times m}$, $B(t) = (b_1(t), \ldots, b_m(t))$ gegeben, mit $b_j(t) \in C^1((a,b), \mathbb{R}^m)$, $j = 1, \ldots, m$. Dann folgt aus Teil (i) mit Hilfe der Multilinearität der Determinate

$$\frac{d}{dt}\det(B(t)) = \sum_{j=1}^{m} \det(b_1(t), \ldots, b_{j-1}(t), b_j'(t), b_{j+1}(t), \ldots, b_m(t))\,.$$

Aufgabe 47:

Es seien $k, m_1, m_2, n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ und $g : \mathbb{R}^{n_1} \to \mathbb{R}^{m_1}$, $h : \mathbb{R}^{n_2} \to \mathbb{R}^{m_2}$ sowie $f : \mathbb{R}^{m_1+m_2} \to \mathbb{R}^k$ jeweils differenzierbar auf ihren Definitionsbereichen. Zeigen Sie, dass $p : \mathbb{R}^{n_1+n_2} \to \mathbb{R}^k$ definiert durch

$$p(x,y) := f(g(x), h(y))$$

auf $\mathbb{R}^{n_1+n_2}$ differenzierbar ist und drücken Sie die Ableitung von p durch die Ableitungen von f, g und h aus.

Lösungsvorschlag: *Voraussetzung:* Es seien $k, n_1, n_2, m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ und $g : \mathbb{R}^{n_1} \to \mathbb{R}^{m_1}$, $h : \mathbb{R}^{n_2} \to \mathbb{R}^{m_2}$ sowie $f : \mathbb{R}^{m_1+m_2} \to \mathbb{R}^k$ jeweils differenzierbar. Außerdem sei $p : \mathbb{R}^{n_1+n_2} \to \mathbb{R}^k$ definiert durch $p(x,y) := f(g(x), h(y))$.

Behauptung: p ist differenzierbar auf $\mathbb{R}^{n_1+n_2}$ und für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^{n_1+n_2}$ gilt

$$p'(x,y) = f'(g(x), h(y)) \begin{pmatrix} g'(x) & 0_{m_1\times n_2} \\ 0_{m_2\times n_1} & h'(y) \end{pmatrix}.$$

Beweis: Wir definieren $G : \mathbb{R}^{n_1+n_2} \to \mathbb{R}^{m_1+m_2}$ durch $G(x,y) := \begin{pmatrix} g(x) \\ h(y) \end{pmatrix}$. Dann ist G auf $\mathbb{R}^{n_1+n_2}$ differenzierbar, da g auf $\mathbb{R}^{n_1}$ und h auf $\mathbb{R}^{n_2}$ differenzierbar ist, und es gilt für $(x,y) \in \mathbb{R}^{n_1+n_2}$

$$G'(x,y) = J_G(x,y) = \begin{pmatrix} (g_1)_{x_1}(x) & \ldots & (g_1)_{x_{n_1}}(x) & (g_1)_{y_1}(x) & \ldots & (g_1)_{y_{n_2}}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (g_{m_1})_{x_1}(x) & \ldots & (g_{m_1})_{x_{n_1}}(x) & (g_{m_1})_{y_1}(x) & \ldots & (g_{m_1})_{y_{n_2}}(x) \\ (h_1)_{x_1}(y) & \ldots & (h_1)_{x_{n_1}}(y) & (h_1)_{y_1}(y) & \ldots & (h_1)_{y_{m_2}}(y) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (h_{m_2})_{x_1}(y) & \ldots & (h_{m_2})_{x_{n_1}}(y) & (h_{m_2})_{y_1}(y) & \ldots & (h_{m_2})_{y_{n_2}}(y) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (g_1)_{x_1}(x) & \ldots & (g_1)_{x_{n_1}}(x) & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (g_{m_1})_{x_1}(x) & \ldots & (g_{m_1})_{x_{n_1}}(x) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & (h_1)_{y_1}(y) & \ldots & (h_1)_{y_{n_2}}(y) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & (h_{m_2})_{y_1}(y) & \ldots & (h_{m_2})_{y_{n_2}}(y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_g(x) & 0_{m_1\times n_2} \\ 0_{m_2\times n_1} & J_h(y) \end{pmatrix}.$$

Da $f : \mathbb{R}^{m_1+m_2} \to \mathbb{R}^k$ auf $\mathbb{R}^{m_1+m_2}$ differenzierbar ist, folgt aus der Kettenregel, dass $p = f \circ G$ differenzierbar auf $\mathbb{R}^{n_1+n_2}$ ist und für jedes $(x,y) \in \mathbb{R}^{n_1+n_2}$ gilt

$$p'(x,y) = (f \circ G)'(x,y) = f'(G(x,y))G'(x,y) = f'(g(x), h(y)) \begin{pmatrix} g'(x) & 0_{m_1\times n_2} \\ 0_{m_2\times n_1} & h'(y) \end{pmatrix}. \quad \square$$

— Bitte wenden! —

Aufgabe 48:

Bestimmen Sie alle Stellen lokaler Extrema der folgenden Funktionen und entscheiden Sie, ob es sich dabei um Minima oder Maxima handelt. Untersuchen Sie für die Funktion in (i) ferner, ob es globale Minima oder Maxima gibt.

(i) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x,y) := (x^2 + 2y^2)e^{-(x^2+y^2)}$,

(ii) $g : \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x,y \geq 0\} \to \mathbb{R}$ definiert durch $g(x,y) = y(1-x)e^{-x^2-y^2}$.

Lösungsvorschlag:

(i) *Voraussetzung:* Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x,y) := (x^2 + 2y^2)e^{-(x^2+y^2)}$.
Behauptung: f besitzt ein globales Minimum in $(0,0)$, globale Maxima in $(0,\pm 1)$ und keine weiteren lokalen Extrema.
Beweis: f ist zweimal stetig differenzierbar und es gilt

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xe^{-(x^2+y^2)} - 2x(x^2+2y^2)e^{-(x^2+y^2)} = (2x - 2x^3 - 4xy^2)e^{-(x^2+y^2)} \quad \text{und}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4ye^{-(x^2+y^2)} - 2y(x^2+2y^2)e^{-(x^2+y^2)} = (4y - 2x^2y - 4y^3)e^{-(x^2+y^2)}$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Somit haben wir für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ die Äquivalenzkette

$$\begin{aligned}
&\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\iff x(2 - 2x^2 - 4y^2) = 0 \quad \text{und} \quad y(4 - 2x^2 - 4y^2) = 0 \\
&\iff \big(x = 0 \text{ oder } 1 - x^2 - 2y^2 = 0\big) \quad \text{und} \quad \big(y = 0 \text{ oder } 2 - x^2 - 2y^2 = 0\big) \\
&\iff \big(x = 0 = y\big) \text{ oder } \big(x = 0 \text{ und } 2 - 2y^2 = 0\big) \text{ oder } \big(1 - x^2 = 0 \text{ und } y = 0\big).
\end{aligned}$$

Die Nullstellen des Gradienten sind also $(0,0)$, $(0,\pm 1)$ und $(\pm 1, 0)$.
Wegen $f(0,0) = 0 < f(x,y)$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ hat f in $(0,0)$ ein globales (und daher auch lokales) Minimum.
Für die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung gilt

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) &= (2 - 6x^2 - 4y^2)e^{-(x^2+y^2)} - 2x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) &= -4xye^{-(x^2+y^2)} - 2x\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \quad \text{und} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) &= (4 - 2x^2 - 12y^2)e^{-(x^2+y^2)} - 2y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)
\end{aligned}$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Da in $(0,\pm 1)$ die beiden ersten partiellen Ableitungen von f Null sind, erhalten wir mit dem Satz von Schwarz für die Hessematrix in diesen Punkten

$$H_f(0,\pm 1) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,\pm 1) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,\pm 1) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,\pm 1) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,\pm 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2e^{-1} & 0 \\ 0 & -8e^{-1} \end{pmatrix}.$$

An $-2e^{-1} < 0$ und $\det H_f(0,\pm 1) = 16e^{-2} > 0$ erkennt man, dass diese Matrix negativ definit ist. Somit hat f in $(0,\pm 1)$ jeweils ein lokales Maximum mit Funktionswert $2e^{-1}$.
Aus

$$\det H_f(\pm 1, 0) = \det \begin{pmatrix} -4e^{-1} & 0 \\ 0 & 2e^{-1} \end{pmatrix} = -8e^{-2} < 0$$

folgt, dass $H_f(\pm 1, 0)$ indefinit ist und daher f in $(\pm 1, 0)$ jeweils kein Extremum hat.
Wegen $x^2 + 2y^2 \leq 2(x^2 + y^2)$ und weil $2Re^{-R} \to 0$ für $R \to \infty$ gilt, sind die beiden lokalen Maxima globale Maxima.

(ii) *Voraussetzung:* Sei $g : \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x,y \geq 0\} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$g(x,y) = y(1-x)e^{-x^2-y^2}\,.$$

Behauptung: g besitzt ein lokales Minimum in $(\frac{1}{2}(1+\sqrt{3}), \frac{1}{\sqrt{2}})$, ein globales Maximum in $(0, \frac{1}{\sqrt{2}})$ und keine weiteren lokalen Extrema.
Beweis: g ist zweimal stetig differenzierbar auf $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; x,y > \; 0\}$. Also gilt im Innern von $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x,y \geq 0\}$

$$\begin{aligned} g_x(x,y) &= e^{-x^2-y^2}\big(y(-1-2x+2x^2)\big)\,,\\ g_y(x,y) &= e^{-x^2-y^2}\big((1-x)(1-2y^2)\big)\,. \end{aligned}$$

Wir sind interessiert an allen Punkten $\nabla g(x,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Offensichtlich würde $y = 0$ und $x = 1$ dies erfüllen, aber $(1,0) \notin \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x,y > 0\}$. Also folgt, dass $g_x(x,y) = 0$ äquivalent ist zu $(-1-2x+2x^2) = 0$ und somit $x = \frac{1}{2}(1+\sqrt{3})$. Damit muss $y = \frac{1}{\sqrt{2}}$, da sonst $g_y(\frac{1}{2}(1+\sqrt{3}), y) \neq 0$.
Nun berechnen wir die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung

$$\begin{aligned} g_{xx}(x,y) &= -2ye^{-x^2-y^2}(-3x+1-2x^2+2x^3)\\ g_{xy}(x,y) &= f_{yx}(x,y) = -e^{-x^2-y^2}(1+2x-2x^2-2y^2-4xy^2+4x^2y^2)\\ g_{yy}(x,y) &= -2ye^{-x^2-y^2}(3-3x-2y^2+2xy^2) \end{aligned}$$

Somit gilt für die Hessematrix im Punkt $(\frac{1}{2}(1+\sqrt{3}), \frac{1}{\sqrt{2}})$

$$H_g\Big(\frac{1}{2}(1+\sqrt{3}), \frac{1}{\sqrt{2}}\Big) = e^{-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{6} & 0 \\ 0 & \sqrt{2}(\sqrt{3}-1) \end{pmatrix}$$

Damit ist H_g positiv definit und somit ist der Punkt $(\frac{1}{2}(1+\sqrt{3}), \frac{1}{\sqrt{2}})$ ein isoliertes Minimum.
Es bleibt noch der Rand des Gebiets $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x,y \geq 0\}$ zu betrachten. Es gilt

$$\begin{aligned} g(x,y) &\to 0 && \text{für } x^2+y^2 \to \infty\,,\\ g(x,0) &= 0 && \text{für alle } x \geq 0\,,\\ g(0,y) &= ye^{y^2} && \text{für alle } y > 0\,. \end{aligned}$$

Die Funktion $y \mapsto ye^{-y^2}$ hat sein Maximum bei $y = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Somit folgt, dass g ein globales Maximum in $(0, \sqrt{2})$ hat.

Aufgabe 49: (K)
Es sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x,y,z) := x^4 - 2x^2y^2z + 4y + 2z$. Bestimmen Sie alle $x_0 \in \mathbb{R}^3$ in denen f ein lokales Extremum besitzt.

Lösungsvorschlag: *Voraussetzung:* Es sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x,y,z) := x^4 - 2x^2y^2z + 4y + 2z$.

Behauptung: f besitzt keine lokalen Extrema.

Beweis: Es ist leicht zu zeigen, dass $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$. Insbesondere gilt für $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

$$(\nabla f)(x,y,z) = (4x^3 - 4xy^2z, -4x^2yz + 4, -2x^2y^2 + 2).$$

— Bitte wenden! —

Aufgrund der Regularität von f ist $(\nabla f)(x, y, z) = (0, 0, 0)$ eine notwendige Bedingung für die Existenz eines Extremums in (x, y, z). Wir bestimmen also alle kritischen Punkte von f in $\mathbb{R}^3$. Dies liefert das nichtlineare Gleichungssystem

$$4x^3 - 4xy^2z = 0 \tag{1}$$
$$-4x^2yz + 4 = 0 \tag{2}$$
$$-2x^2y^2 + 2 = 0. \tag{3}$$

Zunächst stellen wir fest, dass (x, y, z) mit $x = 0$ oder $y = 0$ keine Lösung dieses Gleichungssystems ist. Von nun an sei daher $x, y \neq 0$. Für Gleichung (3) folgt dann

$$-2x^2y^2 + 2 = 0 \implies y^2 = \frac{1}{x^2}.$$

Dies setzen wir in Gleichung (1) ein und erhalten

$$0 = 4x^3 - 4xy^2z = 4x^3 - 4\frac{z}{x} \implies z = x^4.$$

Für Gleichung (2) folgt

$$0 = -4x^2yz + 4 \implies \frac{4z}{y} = 4 \implies z = y.$$

Also ist (x, y, z) mit $x, y \neq 0$ genau dann eine Lösung, wenn

$$x^{10} = 1 \text{ und } z = y = x^4.$$

Daher sind die kritischen Punkte von f gegeben durch

$$(x_0, y_0, z_0) \in \{(1, 1, 1), (-1, 1, 1)\}.$$

Als nächstes betrachten wir die Hesse-Matrix für diese kritischen Punkte. Dafür müssen wir die zweiten Ableitungen von f berechnen. Für beliebige $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ gilt

$$\begin{aligned}
f_{xx}(x, y, z) &= 12x^2 - 4y^2z \\
f_{xy}(x, y, z) = f_{yx}(x, y, z) &= -8xyz \\
f_{xz}(x, y, z) = f_{zx}(x, y, z) &= -4xy^2 \\
f_{yy}(x, y, z) &= -4x^2z \\
f_{yz}(x, y, z) = f_{zy}(x, y, z) &= -4x^2y \\
f_{zz}(x, y, z) &= 0.
\end{aligned}$$

Somit

$$H_f(1, 1, 1) = \begin{pmatrix} 8 & -8 & -4 \\ -8 & -4 & -4 \\ -4 & -4 & 0 \end{pmatrix} = (-4) \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und

$$H_f(-1, 1, 1) = \begin{pmatrix} 8 & 8 & 4 \\ 8 & -4 & -4 \\ 4 & -4 & 0 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Für $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$\det \begin{pmatrix} -2-\lambda & 2 & 1 \\ 2 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3 - \lambda^2 + 8\lambda + 5 =: d(\lambda)$$

Es gilt $d(\lambda) \overset{\lambda\to-\infty}{\longrightarrow} \infty$ und $d(\lambda) \overset{\lambda\to\infty}{\longrightarrow} -\infty$. Ferner ist $d(-1) = -3$ und $d(1) = 11$. Der Zwischenwertsatz liefert nun eine Nullstelle $\lambda_1 < 0$ und eine Nullstelle $\lambda_2 > 0$ von d. Damit hat $H_f(1,1,1)$ einen positiven und negativen Eigenwert und ist daher indefinit. Aus der Vorlesung folgt somit, dass f bei $(1,1,1)$ kein lokales Extremum hat.
Für $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$\det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 2 & 1 \\ 2 & -1-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & -\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3 + \lambda^2 + 8\lambda - 5,$$

und eine analoge Betrachtung des charakteristischen Polynoms liefert wieder die Indefinitheit von $H_f(-1,1,1)$. Also hat f auch in $(-1,1,1)$ kein lokales Extremum. $\square$

Aufgabe 50: (Präsensaufgabe)
Es seien $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$. Geben Sie ein Beispiel an für

(i) eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ welche weder positiv noch negativ definit und nicht indefinit ist,

(ii) $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}^n$, $x \in D$ und $f : D \to \mathbb{R}$ so, dass $H_f(x)$ nicht symmetrisch ist,

(iii) $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}^n$ und $f : D \to \mathbb{R}$ mit keinem kritischen Punkt und mindestens einem lokalen Extremum,

(iv) $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}^n$ und $f : D \to \mathbb{R}$ mit mindestens einem kritischen Punkt und keinem lokalen Extremum,

Lösungsvorschlag:

(i) $A := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(ii) f wie in Aufgabe 34.

(iii) $D := [1,2] \times [1,2]$ und $f : D \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x,y) := x + y$.

(iv) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x,y) := xy$.

Erinnerung:
Die Klausur zur Vorlesung Analysis 2 findet am **17. September 2019** von **11 - 13 Uhr** statt.

Die Anmeldung zur Klausur ist ab sofort möglich. **Anmeldeschluss** ist der **01. September 2019**. Eine Anmeldung nach diesem Termin ist **NICHT** möglich.
Studenten die den Übungsschein benötigen können sich erst anmelden wenn Sie den Übungsschein bestanden haben.

Die Anmeldung erfolgt über Campus Management für Studierende.
Diese und weitere Informationen finden Sie unter

`http://www.math.kit.edu/iana3/~schmoeger/seite/termin/de`