Institut für Analysis
Prof. Dr. Dirk Hundertmark
Dr. Markus Lange

SoSe 2019
03.07.2019

Analysis 2

Aufgabenzettel 11

Abgabe bis 10. Juli 2019, 10:00 Uhr

Wiederholung: (Taylorpolynom 2-ter Ordnung)
Für $n \in \mathbb{N}$ und $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zweimal partiell differenzierbar in $x_0 \in \mathbb{R}^n$ heißt

$$T_2(f; x, x_0) := f(x_0) + (\nabla f)(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}(x - x_0)^T H_f(x_0)(x - x_0).$$

mit $x \in \mathbb{R}^n$ das Taylorpolynom 2-ter Ordnung von f in $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Aufgabe 51: (K)
Es sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x, y, z) := ye^{z+3x^2}$ und $x_0 := (0, 0, 0)$. Berechnen Sie $T_2(f; (x, y, z), x_0)$ und untersuchen Sie die Existenz von

$$\lim_{(x,y,z)\to x_0} \frac{f(x, y, z) - T_2(f; (x, y, z), x_0)}{\|(x, y, z)\|^3}.$$

Aufgabe 52: (K)
Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x, y) := \sqrt{x + y}$.

(i) Bestimmen Sie das m-te Taylorpolynom T_m von f mit Entwicklungspunkt $(1, 0)$.

(ii) Für welche $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ konvergiert $T_m(x, y) \to f(x, y)$ für $m \to \infty$.

Aufgabe 53:
Es sei $a_{ij} \in (0, \infty)$ für $i, j \in \mathbb{N}_0$ mit $i + j \leq 3$ und $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x, y) := \sum_{i+j\leq 3} a_{ij} x^i y^j$$

sowie $x_0 := (0, 0)$. Berechnen Sie $T_2(f; (x, y), x_0)$ und bestimmen jedes $\alpha \in [0, \infty)$ mit

$$\lim_{(x,y)\to x_0} \frac{f(x, y) - T_2(f; (x, y), x_0)}{\|(x, y)\|^\alpha} = 0.$$

— **Bitte wenden!** —

Aufgabe 54: (K)
Seien $a, b \in \mathbb{R}$.

(i) Sei $g \in C(\mathbb{R}^2)$. Zeigen Sie, dass dann $\int_a^b g(x,y)\,dy$ stetig in $x \in \mathbb{R}$ ist.

Hinweis: Betrachten Sie eine Menge auf der g gleichmässig stetig ist und zeigen Sie dann mit Hilfe geeigneter Cauchy-Summen das gesuchte Stetigkeitsresultat.

(ii) Sei $g \in C^1(\mathbb{R}^2)$. Zeigen Sie, dass dann $\int_a^b g(x,y)\,dy \in C^1(\mathbb{R})$ ist und

$$\frac{d}{dx}\int_a^b g(x,y)\,dy = \int_a^b \frac{\partial g}{\partial x}(x,y)\,dy\,.$$

Hinweis: Verwenden Sie den Mittelwertsatz und die gleichmässige Stetigkeit von $\frac{\partial g}{\partial x}$ auf einer geeigneten Menge.

Aufgabe 55:
Sei $M := C([-t,t])$ die Menge der stetigen Funktionen $\varphi : [-t,t] \to \mathbb{R}$ für $t > 0$. Weiter sei $x \in \mathbb{R}$ und $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig und global Lipschitz-stetig in der ersten Komponente, d.h. es existiert ein $L > 0$ so dass

$$|f(y_1,s) - f(y_2,s)| \leq L|y_2 - y_1|\,, \qquad \forall\, y_1, y_2 \in \mathbb{R}, s \in \mathbb{R}\,.$$

Wir definieren die Abbildung $T : M \to M$ wie folgt

$$\big(T\varphi\big)(s) := x + \int_0^s f(\varphi(u),u)\,du\,.$$

(i) Man zeige, dass $T : C([-t,t]) \to C([-t,t])$ für alle t. Weiter zeige man, falls t klein genug ist, so ist $T : C([-t,t]) \to C([-t,t])$ eine Kontraktion (mit $0 \leq \alpha < 1$).

(ii) Man zeigen, dass $T : C([-t,t]) \to C([-t,t])$ einen Fixpunkt hat falls t klein genug ist.

(iii) Beantworten Sie folgende Fragen:

a) Warum ist jede stetige Funktion $\varphi : [-t,t] \to \mathbb{R}$, die Lösung der Gleichung

$$\varphi(s) = x + \int_0^s f(\varphi(u),u)\,du$$

ist, auch differenzierbar auf $(-t,t)$?

b) Warum hat die Differenzialgleichung

$$\begin{cases} \varphi'(s) = f(\varphi(s),s)\,, & -t < s < t \\ \varphi(0) = x \end{cases}$$

eine Lösung?

Bemerkung: Dies ist eine sehr einfache Version des Satzes von Picard-Lindelöf.

Erinnerung:

- Die Anmeldung für den Übungsschein ist nun möglich. Anmeldeschluss ist der 26.07.2019. Für die Fachrichtungen Mathematik-Bachelor, Mathematik-Lehramt und Informatik ist der Übungsschein Voraussetzung für die Anmeldung zur Prüfung Analysis II.

- Die Klausur zur Vorlesung Analysis 2 findet am **17. September 2019** von **11 - 13 Uhr** statt.

  Die Anmeldung zur Klausur ist ab sofort möglich. **Anmeldeschluss** ist der **01. September 2019**. Eine Anmeldung nach diesem Termin ist **NICHT** möglich.
  Studenten die den Übungsschein benötigen können sich erst anmelden wenn Sie den Übungsschein bestanden haben.

  Die Anmeldung erfolgt über Campus Management für Studierende.
  Diese und weitere Informationen finden Sie unter

  `http://www.math.kit.edu/iana3/~schmoeger/seite/termin/de`