**Institut für Analysis**
Prof. Dr. Dirk Hundertmark
Dr. Markus Lange

SoSe 2019
03.07.2019

# Analysis 2

## Aufgabenzettel 11

**Abgabe bis 10. Juli 2019, 10:00 Uhr**

**Wiederholung**: (Taylorpolynom 2-ter Ordnung)
Für $n \in \mathbb{N}$ und $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zweimal partiell differenzierbar in $x_0 \in \mathbb{R}^n$ heißt

$$T_2(f; x, x_0) := f(x_0) + (\nabla f)(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}(x - x_0)^T H_f(x_0)(x - x_0).$$

mit $x \in \mathbb{R}^n$ das Taylorpolynom 2-ter Ordnung von $f$ in $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

**Aufgabe 51:** (K)
Es sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x, y, z) := ye^{z+3x^2}$ und $x_0 := (0, 0, 0)$. Berechnen Sie $T_2(f; (x, y, z), x_0)$ und untersuchen Sie die Existenz von

$$\lim_{(x,y,z)\to x_0} \frac{f(x, y, z) - T_2(f; (x, y, z), x_0)}{\|(x, y, z)\|^3}.$$

**Lösungsvorschlag:** *Voraussetzung:* Es sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x, y, z) := ye^{z+3x^2}$ und $x_0 := (0, 0, 0)$.

*Behauptung:* $T_2(f; (x, y, z), x_0) = y + yz$ und

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{f(x, y, z) - T_2((x, y, z), x_0)}{\|(x, y, z)\|^3}$$

existiert nicht.

*Beweis:* (i) Wir berechnen zuerst $T_2(f; (x, y, z), x_0)$. $f$ ist als Komposition von $C^2$ Funktionen auch eine $C^2$ Funktion. Insbesondere gilt für $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, dass

$$\begin{aligned}
f_x(x, y, z) &= 6xye^{z+3x^2}\\
f_y(x, y, z) &= e^{z+3x^2}\\
f_z(x, y, z) &= ye^{z+3x^2}\\
f_{xx}(x, y, z) &= 6ye^{z+3x^2} + 36x^2ye^{z+3x^2}\\
f_{xy}(x, y, z) = f_{yx}(x, y, z) &= 6xe^{z+3x^2}\\
f_{xz}(x, y, z) = f_{zx}(x, y, z) &= 6xye^{z+3x^2}\\
f_{yy}(x, y, z) &= 0\\
f_{yz}(x, y, z) = f_{zy}(x, y, z) &= e^{z+3x^2}\\
f_{zz}(x, y, z) &= ye^{z+3x^2}
\end{aligned}$$

**— Bitte wenden! —**

Dann ergibt sich sofort

$$\begin{aligned}
T_2(f;(x,y,z),x_0) &= f(x_0) + (\nabla f)(x_0)\left(\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} - x_0\right) + \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} - x_0\right)^T H_f(x_0)\left(\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} - x_0\right)\\
&= 0 + (0,1,0)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} + \frac{1}{2}(x,y,z)\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\\
&= y + \frac{1}{2}(x,y,z)\begin{pmatrix}0\\z\\y\end{pmatrix} = y(1+z).
\end{aligned}$$

(ii) Wir betrachten nun besagten Grenzwert. Für $v := (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{x_0\}$ gilt

$$\frac{|f(v) - T_2(f;v,x_0)|}{\|v\|^3} = \frac{|y||e^{z+3x^2} - z - 1|}{\|v\|^3} = \frac{|y|}{\|v\|}\frac{\left|3x^2 + \sum_{k=2}^\infty \frac{(z+3x^2)^k}{k!}\right|}{\|v\|^2}.$$

Setzt man $z = 0$ und $x = y$, so gilt

$$\frac{|y|}{\|v\|}\frac{\left|3x^2 + \sum_{k=2}^\infty \frac{(z+3x^2)^k}{k!}\right|}{\|v\|^2} = \frac{|x|}{2\sqrt{2}|x|}\Big(3 + \sum_{k=2}^\infty \frac{3^k x^{2k-2}}{k!}\Big) \xrightarrow{x\to 0} \frac{3}{2\sqrt{2}}$$

Für $y = 0$ und $x, z \neq 0$ gilt aber

$$\frac{|y|}{\|v\|}\frac{\left|3x^2 + \sum_{k=2}^\infty \frac{(z+3x^2)^k}{k!}\right|}{\|v\|^2} = 0.$$

Also existiert

$$\lim_{v\to 0}\frac{|f(v) - T_2(f;v,x_0)|}{\|v\|^3}$$

nicht. □

**Aufgabe 52:** (K)
Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x,y) := \sqrt{x+y}$.

(i) Bestimmen Sie das $m$-te Taylorpolynom $T_m$ von $f$ mit Entwicklungspunkt $(1,0)$.

(ii) Für welche $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ konvergiert $T_m(x,y) \to f(x,y)$ für $m \to \infty$.

**Lösungsvorschlag:**

(i) Für die $k$-ten partiellen Ableitungen erhält man ($k = i + j$):

$$\begin{aligned}
D_1^i D_2^j f(x,y) = \frac{\partial^k f}{\partial x^i \partial x^j}(x,y) &= \frac{1}{2}\big(\frac{1}{2} - 1\big)\cdot\ldots\cdot\big(\frac{1}{2} - k + 1\big)(x+y)^{\frac{1}{2}-k}\\
&= k!\binom{1/2}{k}(x+y)^{\frac{1}{2}-k}.
\end{aligned}$$

Am Entwicklungspunkt als $D_1^{m_1}D_2^{m_2}f(1,0) = k!\binom{1/2}{k}$. Fïr das $m$-te Taylorpolynom erhält man daher

$$T_m(x,y) = \sum_{k=0}^m \Big(\sum_{j=0}^k \frac{k!}{j!(k-j)!}\binom{1/2}{k}(x-1)^j y^{k-j}\Big) = \sum_{k=0}^m \binom{1/2}{k}\big[(x-1)+y\big]^k.$$

(ii) Das obige Taylorpolynom $T_m(x, y)$ ist ein Abschnitt der bekannten Binomialreihe. Sie konvergiert auf jedenfall für $|(x-1)+y| < 1$ gegen

$$f(x,y) = \left[1 + (x-1) + y\right]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x+y}\,.$$

Beachte weiter, dass $(1+x)^\alpha$ für $|x| = 1$ genau dann absolut konvergiert wenn der Realteil von $\alpha$ echt grösser Null und oder $\alpha = 0$ ist. Hier ist $\alpha = \frac{1}{2}$. Somit haben wir auch Konverenz auf dem Rand. Also konvergiert $T_m(x, y) \to f(x, y)$ für $m \to \infty$ für alle $(x, y) \in \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, |(x-1)+y| \leq 1\}$.

*Bemerkung*: Da eine Potenzreihe stets die Taylorreihe der dargestellten Funktion ist, hätte man auch direkt diese Reihe als Taylorreihe und ihre Abschnitte als Taylorpolynome angeben können.

**Aufgabe 53:**
Es sei $a_{ij} \in (0, \infty)$ für $i, j \in \mathbb{N}_0$ mit $i + j \leq 3$ und $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) := \sum_{i+j \leq 3} a_{ij} x^i y^j$$

sowie $x_0 := (0, 0)$. Berechnen Sie $T_2(f; (x, y), x_0)$ und bestimmen jedes $\alpha \in [0, \infty)$ mit

$$\lim_{(x,y)\to x_0} \frac{f(x,y) - T_2(f;(x,y),x_0)}{\|(x,y)\|^\alpha} = 0.$$

**Lösungsvorschlag:** *Voraussetzung:* Es sei $x_0 := (0, 0)$ und $a_{ij} \in (0, \infty)$ für $i, \in \mathbb{N}_0$ und $i + j \leq 3$ sowie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) := \sum_{i+j \leq 3} \alpha_{ij} x^i y^j.$$

*Behauptung:* $T_2(f; (x, y), x_0) = \sum_{i+j\leq 2} a_{ij} x^i y^j$ und

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - T_2(f;(x,y),x_0)}{\|(x,y)\|^\alpha} = 0$$

genau dann, wenn $\alpha \in [0, 3)$.

*Beweis:* (i) $f$ ist $C^\infty$ als Polynom. Die partiellen Ableitungen sind dabei gegeben durch

$$\begin{aligned}
f_x(x,y) &= \sum_{\substack{i+j\leq 3\\ i\geq 1}} a_{ij} i x^{i-1} y^j \\
f_y(x,y) &= \sum_{\substack{i+j\leq 3\\ j\geq 1}} a_{ij} j x^{i} y^{j-1} \\
f_{xx}(x,y) &= \sum_{\substack{i+j\leq 3\\ i\geq 2}} a_{ij} i(i-1) x^{i-2} y^j \\
f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) &= \sum_{\substack{i+j\leq 3\\ i,j\geq 1}} a_{ij} ij x^{i-1} y^{j-1} \\
f_{yy}(x,y) &= \sum_{\substack{i+j\leq 3\\ j\geq 2}} a_{ij} j(j-1) x^{i} y^{j-2}\,.
\end{aligned}$$

**— Bitte wenden! —**

Insbesondere gilt

$$\begin{aligned} f(0,0) = a_{00}\,, \quad f_x(0,0) = a_{10}\,, \quad f_y(0,0) = a_{01}\,, \\ f_{xx}(0,0) = 2a_{20}\,, \quad f_{xy}(0,0) = a_{11}\,, \quad f_{yy}(0,0) = 2a_{02}\,. \end{aligned}$$

Und damit

$$\begin{aligned} T_2(f;(x,y),x_0) &= f(0,0) + (\nabla f)(0,0)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(x,y)H_f(0,0)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 \\ &= \sum_{i+j\le 2} a_{ij}x^iy^j. \end{aligned}$$

(ii) Es sei $\alpha \in [0,\infty)$. Für $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{x_0\}$ gilt

$$\frac{f(x,y) - T_2(f;(x,y),x_0)}{\|(x,y)\|^\alpha} = \frac{\sum_{i+j\le 3} a_{ij}x^iy^j - \sum_{i+j\le 2} a_{ij}x^iy^j}{\|(x,y)\|^\alpha} \qquad = \sum_{i+j=3} a_{ij}\frac{x^iy^j}{\|(x,y)\|^\alpha}\,.$$

Die Ordnung des Polynoms im Zähler ist 3, was die Vermutung nahe legt, dass der Grenzwert für $\alpha \ge 3$ nicht existiert. Sei also zunächst $\alpha > 3$. Wählen wir $x = y > 0$ so folgt

$$\sum_{i+j=3} a_{ij}\frac{x^iy^j}{\|(x,y)\|^\alpha} = \frac{x^3}{2^{\frac{\alpha}{2}}x^\alpha}\underbrace{\Big(\sum_{i+j=3} a_{ij}\Big)}_{=:A>0} = \frac{x^{3-\alpha}A}{2^{\frac{\alpha}{2}}} \overset{x\to 0}{\to} \infty$$

wegen $3-\alpha < 0$.
Für $\alpha = 3$ wählen wir $x = y > 0$ und erhalten

$$\sum_{i+j=3} a_{ij}\frac{x^iy^j}{\|(x,y)\|^3} = \frac{A}{2^{\frac{3}{2}}} > 0$$

Für $\alpha \in [0,3)$ gilt

$$\Big|\sum_{i+j=3} a_{ij}\frac{x^iy^j}{\|(x,y)\|^3}\Big| \le \sum_{i+j=3} a_{ij}\frac{\|(x,y)\|^i\|(x,y)\|^j}{\|(x,y)\|^\alpha} = A\|(x,y)\|^{3-\alpha} \overset{(x,y)\to(0,0)}{\to} 0,$$

wegen $3-\alpha > 0$. □

**Aufgabe 54:** (K)
Seien $a,b \in \mathbb{R}$.

(i) Sei $g \in C(\mathbb{R}^2)$. Zeigen Sie, dass dann $\int_a^b g(x,y)\,dy$ stetig in $x \in \mathbb{R}$ ist.

*Hinweis*: Betrachten Sie eine Menge auf der $g$ gleichmässig stetig ist und zeigen Sie dann mit Hilfe geeigneter Cauchy-Summen das gesuchte Stetigkeitsresultat.

(ii) Sei $g \in C^1(\mathbb{R}^2)$. Zeigen Sie, dass dann $\int_a^b g(x,y)\,dy \in C^1(\mathbb{R})$ ist und

$$\frac{d}{dx}\int_a^b g(x,y)\,dy = \int_a^b \frac{\partial g}{\partial x}(x,y)\,dy\,.$$

*Hinweis*: Verwenden Sie den Mittelwertsatz und die gleichmässige Stetigkeit von $\frac{\partial g}{\partial x}$ auf einer geeigneten Menge.

**Lösungsvorschlag:** Seien $a, b \in \mathbb{R}$.

(i) Als stetige Funktion auf $\mathbb{R}^2$ ist $g$ insbesonder gleichmässig stetig auf jeder kompakten Teilmenge von $\mathbb{R}^2$. Eine solche kompakte Teilmenge ist zum Beispiel gegeben durch ein Rechteck $a \le x \le b$, $c \le y \le d$. Somit existiert zu jedem $\frac{1}{n}$ ein $\frac{1}{m}$ so dass $|g(x,y) - g(x'(x,y)| \le \frac{1}{n}$ wenn $|x - x'| \le \frac{1}{m}$ für $(x,y)$ und $(x',y)$ in dem Rechteck. Betrachten wir nun zwei Cauchy-Summen die $\int_a^b g(x,y)\,dy$ und $\int_a^b g(x',y)\,dy$, jeweils ausgewertet bezüglich der selben $y$-Werten, approximieren. Dann können diese sich höchstens um einen Faktor $\frac{b-a}{n}$ unterscheiden, denn

$$\Big|\sum g(x,y_j)\Delta y_j - \sum g(x',y_j)\Delta y_j\Big| \le \sum \big|g(x,y_j) - g(x',y_j)\big|\Delta y_j \le \frac{1}{n}\sum \Delta y_j = \frac{b-a}{n}\,.$$

Halten wir also $x$ und $x'$ fest (wobei $|x - x'| \le \frac{1}{m}$) und machen wir den Grenzübergang wenn die maximale Intervallänge der Partition gegen Null geht, so werden die Summen Integrale und wir erhalten

$$\Big|\int_a^b g(x,y)\,dy - \int_a^b g(x',y)\,dy\Big| \le \frac{b-a}{n}\,.$$

Somit ist $\int_a^b g(x,y)\,dy$ stetig in $x \in \mathbb{R}$. □

(ii) Sei $g \in C^1(\mathbb{R}^2)$. Wir betrachten den Differenzquotient

$$\frac{1}{h}\Big(\int_a^b g(x+h,y)\,dy - \int_a^b g(x,y)\,dy\Big) = \int_a^b \frac{1}{h}\big(g(x+h,y) - g(x,y)\big)\,dy\,.$$

Wir wollen den Grenzübergang $h \to 0$ machen aber gleichzeitig auch den Limes mit dem Integral vertauschen. Dies ist nur dann gerechtfertigt wenn wir zeigen können, dass $(g(x+h,y) - g(x,y))/h$ gleichmässig in $y$ gegen $\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)$ konvergiert. Aus dem Mittelwertsatz (Satz 11.1) folgt, dass es einen Punkt $z \in (x, x+h)$ gibt, so dass

$$\frac{(g(x+h,y) - g(x,y))}{h} = \frac{\partial g}{\partial x}(z,y)\,,$$

wobei dieses $z$ auch von $y$ abhängen wird. Aus der Stetigkeit von $\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)$ folgt nun wie in (i) die gleichmässige Stetigkeit auf jeder beliebigen kompakten Menge des $\mathbb{R}^2$. Wir nehmen wieder das Rechteck aus (i) und erhalten somit das $\frac{\partial g}{\partial x}(z,y)$ gleichmässig gegen $\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)$ konvergiert. □

## Aufgabe 55:

Sei $M := C([-t,t])$ die Menge der stetigen Funktionen $\varphi : [-t,t] \to \mathbb{R}$ für $t > 0$. Weiter sei $x \in \mathbb{R}$ und $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig und global Lipschitz-stetig in der ersten Komponente, d.h. es existiert ein $L > 0$ so dass

$$|f(y_1,s) - f(y_2,s)| \le L|y_2 - y_1|\,, \qquad \forall\, y_1, y_2 \in \mathbb{R}, s \in \mathbb{R}\,.$$

Wir definieren die Abbildung $T : M \to M$ wie folgt

$$\big(T\varphi\big)(s) := x + \int_0^s f(\varphi(u),u)\,du\,.$$

(i) Man zeige, dass $T : C([-t,t]) \to C([-t,t])$ für alle $t$. Weiter zeige man, falls $t$ klein genug ist, so ist $T : C([-t,t]) \to C([-t,t])$ eine Kontraktion (mit $0 \le \alpha < 1$).

(ii) Man zeigen, dass $T : C([-t,t]) \to C([-t,t])$ einen Fixpunkt hat falls $t$ klein genug ist.

**— Bitte wenden! —**

(iii) Beantworten Sie folgende Fragen:

a) Warum ist jede stetige Funktion $\varphi : [-t, t] \to \mathbb{R}$, die Lösung der Gleichung

$$\varphi(s) = x + \int_0^s f(\varphi(u), u)\, du$$

ist, auch differenzierbar auf $(-t, t)$?

b) Warum hat die Differenzialgleichung

$$\begin{cases} \varphi'(s) = f(\varphi(s), s)\,, & -t < s < t \\ \varphi(0) = x \end{cases}$$

eine Lösung?

*Bemerkung*: Dies ist eine sehr einfache Version des Satzes von Picard-Lindelöf.

**Lösungsvorschlag:** Der Raum $M := C([-t, t])$ ist ein metrischer Raum mit Metrik

$$d(\varphi, \psi) = \sup_{s\in[-t,t]} \big|\varphi(s) - \psi(s)\big|$$

wobei $\big|\cdot\big|$ die euklidische Länge auf $\mathbb{R}$ ist. Wir definieren die Abbildung $T : M \to M$ wie in der Aufgabenstellung gegeben durch

$$\big(T\varphi\big)(s) := x + \int_0^s f(\varphi(u), u)\, du \tag{1}$$

außerdem sei $\varphi : [-t, t] \to \mathbb{R}$ stetig.

(i) Da $\int_0^s f(\varphi(u), u)\, du$ Stammfunktion der stetigen Funktion $f(\varphi(u), u)$ ist folgt einerseits, das die Abbildung $T$ gegeben in Gleichung (1) wohldefiniert ist und andereseits, dass $F : [-t, t] \to \mathbb{R}\,;\, s \mapsto \int_0^s f(\varphi(u), u)\, du$ per Definition (der Stammfunktion) stetig ist. Somit gilt insbesondere (Kompositionen stetige Funktionen sind stetig) dass

$$T : C([-t, t]) \to C([-t, t])\,.$$

Für die Kontraktionseigenschaft müssen wir etwas mehr arbeiten. Sei nun zusätzlich $\psi \in C([-t, t])$, dann gilt

$$\begin{aligned} d(T\varphi, T\psi) &= \sup_{s\in[-t,t]} \Big|x + \int_0^s f(\varphi(u), u)\, du - \big(x + \int_0^s f(\psi(u), u)\, du\big)\Big| \\ &= \sup_{s\in[-t,t]} \Big|\int_0^s \big(f(\varphi(u), u) - f(\psi(u), u)\big)\, du\Big| \end{aligned}$$

Mit der Minkowski-Ungleichung (die eigentlich nur eine Verallgemeinerung der Dreiecksungleichung ist) folgt

$$\Big|\int_0^s \big(f(\varphi(u), u) - f(\psi(u), u)\big)\, du\Big| \le \int_0^s \Big|\big(f(\varphi(u), u) - f(\psi(u), u)\big)\Big|\, du$$

Nun folgt aus der globalen Lipschitzeigenschaft von $f$,

$$\int_0^s \Big|\big(f(\varphi(u), u) - f(\psi(u), u)\big)\Big|\, du \le \int_0^s L\big|\varphi(u) - \psi(u)\big|\, du\,.$$

Somit gilt also insgesamt

$$\begin{aligned} d(T\varphi, T\psi) &\leq \sup_{s\in[-t,t]} L \cdot \int_0^s \underbrace{\big|\varphi(u) - \psi(u)\big|}_{\leq d(\varphi,\psi)} \, du \\ &\leq \sup_{s\in[-t,t]} L \cdot |s| \cdot d(\varphi, \psi) \\ &\leq t \cdot L \cdot d(\varphi, \psi)\,, \end{aligned}$$

da $s \in [-t, t]$ und $t > 0$. Für $t < \frac{\alpha}{L}$ ist $T$ also eine $\alpha$-Kontraktion für beliebiges $0 \leq \alpha < 1$. □

*Bemerkung*: Es ist hier wichtig, dass $\int_0^s f(\varphi(u), u)\, du$ klein ist für $s$ nahe bei 0.

(ii) Wie wir in $(i)$ gezeigt haben können wir das Kontraktionsprinzip für $t$ klein genug anwenden. Sei also $t < \frac{\alpha}{L}$, $x_1(s) = x$ und $x_{n+1}(s) = x + \int_0^s f(x_n(u), u)\, du$. Dann gilt nach dem Banachschen Fixpunktsatz (Satz 16.2) dass $\lim_{n\to\infty} x_n(s) = \xi(s)$ ein Fixpunkt von $T$ ist, also

$$\big(T\xi\big)(s) = \xi(s)\,.$$

□

(iii) a) Da $f \in C(\mathbb{R}^2)$ und $\varphi : [-t, t] \to \mathbb{R}$ stetig ist, ist auch $f(\varphi(u), u)$ stetig für $u \in (-t, t)$. Somit ist $g(s) = x + \int_0^s f(\varphi(u), u)\, du$ stetig und nach dem Hauptsatz der Integral und Differenzialrechung differenzierbar mit

$$g'(s) = f(\varphi(s), s)\,,$$

somit also sogar stetig differenzierbar.

b) Aus $a)$ folgt, dass $\varphi(s) = g(s)$ ist, also $\varphi(s) \in C^1$ und $\varphi'(s) = g'(s) = f(\varphi(s), s)$. Somit haben wir insbesondere eine Lösung der Differenzialgleichung $\varphi'(s) = f(\varphi(s), s)$ für $-t < s < t$ mit $\varphi(0) = x$ gefunden.

**Erinnerung:**

- Die Anmeldung für den Übungsschein ist nun möglich. Anmeldeschluss ist der 26.07.2019. Für die Fachrichtungen Mathematik-Bachelor, Mathematik-Lehramt und Informatik ist der Übungsschein Voraussetzung für die Anmeldung zur Prüfung Analysis II.

- Die Klausur zur Vorlesung Analysis 2 findet am **17. September 2019** von **11 - 13 Uhr** statt.

  Die Anmeldung zur Klausur ist ab sofort möglich. **Anmeldeschluss** ist der **01. September 2019**. Eine Anmeldung nach diesem Termin ist **NICHT** möglich.
  **Studenten die den Übungsschein benötigen können sich erst anmelden wenn Sie den Übungsschein bestanden haben.**

  Die Anmeldung erfolgt über Campus Management für Studierende.
  Diese und weitere Informationen finden Sie unter

  `http://www.math.kit.edu/iana3/~schmoeger/seite/termin/de`