Institut für Analysis
Prof. Dr. Dirk Hundertmark
Dr. Markus Lange

SoSe 2019
10.07.2019

Analysis 2

Aufgabenzettel 12

Abgabe bis 17. Juli 2019, 10:00 Uhr

Aufgabe 56: (K)
Es sei $g \in C([0, \frac{1}{2}], \mathbb{R})$. Zeigen Sie unter Verwendung des Banachschen Fixpunktsatzes, dass genau ein $f \in C([0, \frac{1}{2}], \mathbb{R})$ existiert mit

$$\forall x \in [0, \frac{1}{2}] : \quad f(x) - x \int_0^{\frac{1}{2}} f(t) \, \mathrm{d}t = g(x)$$

und berechnen Sie dieses f (Die Berechnung von f gibt zwei Extrapunkte).

Aufgabe 57: (K)
Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $f(a, b) = 0$, $D_2 f(a, b) \neq 0$ und $y = g(x)$ die nach dem Satz über implizite Funktionen exitierende Auflösung der Gleichung $f(x, y) = 0$ in einer Umgebung von (a, b).

(i) Zeigen Sie, dass g zweimal differenzierbar ist und bestimmen Sie die zweite Ableitung von g.

(ii) Berechnen Sie die 2. Ableitung von g für das Beispiel $f(x, y) := y + x \sin(y)$ im Punkt $(a, b) := (0, 0)$.

Aufgabe 58: (K)
Es sei das nichtlineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 - y_1^2 - y_2 &= 0, \\ x_1^2 + 2x_2^2 + 3y_1^2 + 4y_2^2 &= 1, \end{aligned}$$

gegeben und $z_0 := (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0)$. Zeigen Sie, dass offene Mengen $U, V \subset \mathbb{R}^2$ und $\varphi \in C^1(U, \mathbb{R}^2)$ existieren mit $z_0 \in U \times V$ und der Eigenschaft: $(x_1, x_2, y_1, y_2) \in U \times V$ löst das Gleichungssystem genau dann, wenn $\varphi(x_1, x_2) = (y_1, y_2)$. Bestimmen Sie außerdem $\varphi'(\frac{1}{2}, 0)$.

Aufgabe 59:
Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$f(x, y) := \begin{pmatrix} x^3 - xy^2 \\ x^2 y - y^3 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Menge aller $x_0 \in \mathbb{R}^2$ für die offene Mengen $U, V \subset \mathbb{R}^2$ mit $x_0 \in U$ und $f(x_0) \in V$ existieren und $f : U \to V$ bijektiv ist und eine stetig differenzierbare Umkehrfunktion besitzt. Bestimmen Sie in diesem Fall jeweils $(f^{-1})'(f(x_0))$.

— **Bitte wenden!** —

Aufgabe 60: Die Funktion $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ sei gegeben durch

$$f(x_1, x_2, y_1, y_2) := \begin{pmatrix} \cos x_1 + x_2 - y_1^2 - y_2^2 \\ x_1 - \sin(\pi x_2) - y_1^2 + y_2^2 \end{pmatrix} \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}^2.$$

Zeigen Sie, daß durch die Gleichung $f(x_1, x_2, y_1, y_2) = (0, 0)$ in einer gewissen Umgebung U von $(0, 1)$ eine Funktion g mit $g(0, 1) = (1, 1)$ und

$$f\big(x_1, x_2, g(x_1, x_2)\big) = (0, 0) \qquad \text{für alle } (x_1, x_2) \in U$$

implizit definiert wird, und berechnen Sie die Ableitung $g'(0, 1)$.

Aufgabe 61: (Präsensaufgabe)
Finden Sie jeweils eine Funktion $F \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ mit $F(0, 0) = 0$, $\frac{\partial F}{\partial y}(0, 0) = 0$ und der folgenden Eigenschaft.

(a) In jeder Umgebung von 0 gibt es ein x, für das die Gleichung $F(x, y) = 0$ keine Lösung besitzt.

(b) Die Gleichung $F(x, y) = 0$ hat für jedes $x \neq 0$ genau zwei verschiedene Lösungen (x, y_1) und (x, y_2).

(c) Die Gleichung $F(x, y) = 0$ kann in einer Umgebung von 0 eindeutig nach y aufgelöst werden und die Lösung $x \mapsto y(x)$ ist in 0 nicht differenzierbar.

(d) Die Gleichung $F(x, y) = 0$ kann in einer Umgebung von 0 eindeutig nach y aufgelöst werden und die Lösung $x \mapsto y(x)$ ist stetig differenzierbar.

Erinnerung:

- Die Anmeldung für den Übungsschein ist nun möglich. Anmeldeschluss ist der 26.07.2019. Für die Fachrichtungen Mathematik-Bachelor, Mathematik-Lehramt und Informatik ist der Übungsschein Voraussetzung für die Anmeldung zur Prüfung Analysis II.

- Die Klausur zur Vorlesung Analysis 2 findet am **17. September 2019** von **11 - 13 Uhr** statt.

  Die Anmeldung zur Klausur ist ab sofort möglich. **Anmeldeschluss** ist der **01. September 2019**. Eine Anmeldung nach diesem Termin ist **NICHT** möglich.
  Studenten die den Übungsschein benötigen können sich erst anmelden wenn Sie den Übungsschein bestanden haben.

  Die Anmeldung erfolgt über Campus Management für Studierende.
  Diese und weitere Informationen finden Sie unter

  `http://www.math.kit.edu/iana3/~schmoeger/seite/termin/de`