Analysis 2

Aufgabenzettel 12

Abgabe bis 17. Juli 2019, 10:00 Uhr

Aufgabe 56: (K)
Es sei $g \in C([0, \frac{1}{2}], \mathbb{R})$. Zeigen Sie unter Verwendung des Banachschen Fixpunktsatzes, dass genau ein $f \in C([0, \frac{1}{2}], \mathbb{R})$ existiert mit

$$\forall x \in [0, \frac{1}{2}] : \quad f(x) - x \int_0^{\frac{1}{2}} f(t)\, \mathrm{d}t = g(x)$$

und berechnen Sie dieses f (Die Berechnung von f gibt zwei Extrapunkte).

Lösungsvorschlag: *Voraussetzung:* Es sei $g \in C([0, \frac{1}{2}], \mathbb{R})$.
Behauptung: Es gibt genau ein $f \in C([0, \frac{1}{2}], \mathbb{R})$ welches die Gleichung

$$\forall x \in [0, \frac{1}{2}] : \quad f(x) - x \int_0^{\frac{1}{2}} f(t)\, \mathrm{d}t = g(x) \tag{1}$$

eindeutig löst.
Beweis: Wir schreiben die zu lösende Gleichung als eine Fixpunktgleichung in $C([0, \frac{1}{2}], \mathbb{R})$ und definieren $T : C([0, \frac{1}{2}], \mathbb{R}) \to C([0, \frac{1}{2}], \mathbb{R})$ durch

$$Tf(\cdot) := g(\cdot) + (\cdot) \int_0^{\frac{1}{2}} f(t)\, \mathrm{d}t.$$

Dabei ist die rechte Seite in $C([0, \frac{1}{2}], \mathbb{R})$, da $g \in C([0, \frac{1}{2}], \mathbb{R})$ und $x \mapsto Cx$ mit $C \in \mathbb{R}$ in $C([0, \frac{1}{2}], \mathbb{R})$ sind. Es gilt die folgende Äquivalenz:

$$\text{(1) ist erfüllt.} \quad \iff \quad Tf = f.$$

Wir statten nun $C([0, \frac{1}{2}], \mathbb{R})$ mit der Supremumsnorm aus und erhalten den Banachraum $X := (C([0, \frac{1}{2}], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$. Wir haben schon eingesehen, dass $T(X) \subset X$ gilt. Außerdem gilt für $h_1, h_2 \in X$, dass

$$\begin{aligned}
\|Th_1 - Th_2\|_\infty &= \left\| g + (\cdot) \int_0^{\frac{1}{2}} h_1(t)\, \mathrm{d}t - g - (\cdot) \int_0^{\frac{1}{2}} h_2(t)\, \mathrm{d}t \right\|_\infty \\
&= \left\| (\cdot) \int_0^{\frac{1}{2}} h_1(t) - h_2(t)\, \mathrm{d}t \right\|_\infty \leq \sup_{x \in [0, \frac{1}{2}]} \left| x \int_0^{\frac{1}{2}} h_1(t) - h_2(t)\, \mathrm{d}t \right| \\
&\leq \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} |h_1(t) - h_2(t)|\, \mathrm{d}t \leq \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} \sup_{t \in [0, \frac{1}{2}]} |h_1(t) - h_2(t)|\, \mathrm{d}t \\
&\leq \frac{1}{2} \|h_1 - h_2\|_\infty \int_0^{\frac{1}{2}} 1\, \mathrm{d}t = \frac{1}{4} \|h_1 - h_2\|_\infty .
\end{aligned}$$

— **Bitte wenden!** —

Also ist T eine kontraktive Selbstabbildung auf X und besitzt damit nach dem Banachschen Fixpunktsatz einen eindeutigen Fixpunkt $f \in X$ mit $Tf = f$. Gleichung (1) wird also eindeutig von f gelöst.

Zusatzbehauptung: $f \in C([0, \frac{1}{2}], \mathbb{R})$ mit

$$f(x) := g(x) + \frac{8x}{7} \int_0^{\frac{1}{2}} g(t) \, \mathrm{d}t$$

ist die eindeutige Lösung der Gleichung

$$\forall x \in [0, \frac{1}{2}]: \quad f(x) - x \int_0^{\frac{1}{2}} f(t) \, \mathrm{d}t = g(x)$$

1. Möglichkeit: Um f zu berechnen, integrieren wir die Gleichung (1) von 0 bis $\frac{1}{2}$. Dies ist möglich, da f und g stetig sind. Wir erhalten

$$\int_0^{\frac{1}{2}} f(x) \, \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{2}} g(x) \, \mathrm{d}x + \int_0^{\frac{1}{2}} x \int_0^{\frac{1}{2}} f(t) \, \mathrm{d}t \, \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{2}} g(x) \, \mathrm{d}x + \frac{1}{8} \int_0^{\frac{1}{2}} f(t) \, \mathrm{d}t,$$

was äquivalent ist zu

$$\int_0^{\frac{1}{2}} f(x) \, \mathrm{d}x = \frac{8}{7} \int_0^{\frac{1}{2}} g(x) \, \mathrm{d}x$$

ist. Einsetzen dieser Identität in Gleichung (1) liefert

$$f(x) = g(x) + \frac{8x}{7} \int_0^{\frac{1}{2}} g(t) \, \mathrm{d}t.$$

2. Möglichkeit Um f zu berechnen, setzen wir $f_0 \in X$ mit $f_0(t) := 0$ und bestimmen den Grenzwert der Folge $(T^n f_0)_{n\in\mathbb{N}}$. Es konvergiert nämlich $(T^n h)_{n\in\mathbb{N}}$ für jedes $h \in X$ bezüglich $\|\cdot\|_\infty$ gegen f für $n \to \infty$. Da $(T^n f_0)_{n\in\mathbb{N}}$ also gleichmäßig gegen f konvergiert, reicht es die Grenzfunktion punktweise zu bestimmen. Es gilt für alle $x \in [0, \frac{1}{2}]$, dass

$$\begin{aligned}
&(Tf_0)(x) = g(x),\\
&(T^2 f_0)(x) = [(T \circ T) f_0](x) = [Tg](x) = g(x) + x \int_0^{\frac{1}{2}} g(t) \, \mathrm{d}t,\\
&(T^3 f_0)(x) = [(T \circ T^2) f_0](x) = g(x) + x \int_0^{\frac{1}{2}} T^2 f_0(t) \, \mathrm{d}t = g(x) + x \int_0^{\frac{1}{2}} g(t) \, \mathrm{d}t \Big(1 + \frac{1}{8}\Big),\\
&(T^4 f_0)(x) = [(T \circ T^3) f_0](x) = g(x) + x \int_0^{\frac{1}{2}} g(t) \, \mathrm{d}t \Big(1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{64}\Big).
\end{aligned}$$

Eine Induktion liefert für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ die Formel

$$(T^n f_0)(x) = g(x) + x \int_0^{\frac{1}{2}} g(t) \, \mathrm{d}t \left(\sum_{k=0}^{n-2} \Big(\frac{1}{8}\Big)^k \right).$$

Wegen $\sum\limits_{k=0}^{n-2} \left(\frac{1}{8}\right)^k \to \frac{8}{7}$ für $n \to \infty$ gilt folglich für alle $x \in [0, \frac{1}{2}]$

$$(T^n f_0)(x) \to g(x) + \frac{8x}{7} \int_0^{\frac{1}{2}} g(t) \, \mathrm{d}t$$

für $n \to \infty$. Damit haben wir f berechnet zu

$$f(x) = g(x) + \frac{8x}{7} \int_0^{\frac{1}{2}} g(t) \, \mathrm{d}t.$$

Aufgabe 57: (K)
Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $f(a, b) = 0$, $D_2 f(a, b) \neq 0$ und $y = g(x)$ die nach dem Satz über implizite Funktionen exitierende Auflösung der Gleichung $f(x, y) = 0$ in einer Umgebung von (a, b).

(i) Zeigen Sie, dass g zweimal differenzierbar ist und bestimmen Sie die zweite Ableitung von g.

(ii) Berechnen Sie die 2. Ableitung von g für das Beispiel $f(x, y) := y + x \sin(y)$ im Punkt $(a, b) := (0, 0)$.

Lösungsvorschlag: *Voraussetzung*: Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $f(a, b) = 0$ und $D_2 f(a, b) \neq 0$.
Im Folgenden verwenden wir die Abkürzungen: $f_x := D_1 f$, $f_y := D_2 f$

(i) Nach dem Satz über implizite Funktionen (Satz 17.1) gibt es Umgebungen U von a und V von b und eine stetig differenzierbare Funktion $g : U \to V$ derart, dass

$$f(x, y) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad y = g(x)$$

für alle $(x, y) \in U \times V$. Nach dem gleichen Satz gilt für die Ableitung von g, dass

$$g'(x) = -\frac{f_x(x, g(x))}{f_y(x, g(x))}\,. \tag{2}$$

Die Ableitungen $f_x(x, y)$ und $f_y(x, y)$ sind per Voraussetzung noch einmal stetig differenzierbar. Somit gilt mit der Kettenregel (Satz 10.9), dass auch $f_x(x, g(x))$ und $f_y(x, g(x))$ differenzierbar sind. Die Behauptung folgt nun aus der Quotientenregel.

Mit eben dieser kann man auch die 2. Ableitung von g'' berechnen. Einfacher geht es aber durch implizites Differenzieren der Gleichung $0 = f_y g' + f_x$ (vgl. Gleichung (2)). Man erhält mit Produkt- und Kettenregel:

$$\begin{aligned}
0 &= D\Big[f_y(x, g(x))\, g'(x) + f_x(x, g(x))\Big] \\
&= \big[f_{yx}(x, g(x)) + f_{yy}(x, g(x))\, g'(x)\big]\, g'(x) + f_y(x, g(x))\, g''(x) + \big[f_{xx}(x, g(x)) + f_{xy}(x, g(x)) g'(x)\big] \\
&= f_{xx}(x, g(x)) + 2 f_{xy}(x, g(x)) g'(x) + f_{yy}(x, g(x)) (g'(x))^2 + f_y(x, g(x)) g''(x)
\end{aligned}$$

Somit folgt, da $f_y(x, g(x)) \neq 0$, dass

$$g''(x) = \frac{1}{f_y(x, g(x))} \big(f_{xx}(x, g(x)) + 2 g'(x) f_{xy}(x, g(x)) + (g'(x))^2 f_{yy}(x, g(x))\big)\,.$$

(ii) Sei nun $f(x, y) := y + x \sin(y)$. Um die obige Formel anzuwenden berechnen wir die benötigten partiellen Ableitungen

$$f_y = 1 + x\cos(y)\,, \quad f_{xy} = f_{yx} = \cos(y)\,, \quad f_{yy} = -x\sin(y)\,, \quad f_{xx} = 0\,.$$

Somit erhalten wir für die 2. Ableitung von g

$$g''(x) = \frac{1}{1 + x g(x)} \big(0 + 2 g'(x) \cos(g(x)) - (g'(x))^2 x \sin(g(x))\big)$$

Somit gilt im Punkt $(a, b) = (0, 0)$

$$g''(0) = \frac{1}{1} \big(2 g'(0) \cos(g(0))\big) = 2 g'(0)$$

— Bitte wenden! —

wobei wir verwendet haben, dass $0 = y = g(x) = g(0)$ nach Satz 17.1 gilt und $\cos(0) = 1$ ist. Somit folgt mit der Formel für die 1. Ableitung von g aus Satz 17.1

$$g''(0) = -2\frac{f_x(0, g(0))}{f_y(0, g(0))} = -2\frac{\sin(0)}{1} = 0\,.$$

Aufgabe 58: (K)
Es sei das nichtlineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 - y_1^2 - y_2 &= 0, \\ x_1^2 + 2x_2^2 + 3y_1^2 + 4y_2^2 &= 1, \end{aligned}$$

gegeben und $z_0 := (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0)$. Zeigen Sie, dass offene Mengen $U, V \subset \mathbb{R}^2$ und $\varphi \in C^1(U, \mathbb{R}^2)$ existieren mit $z_0 \in U \times V$ und der Eigenschaft: $(x_1, x_2, y_1, y_2) \in U \times V$ löst das Gleichungssystem genau dann, wenn $\varphi(x_1, x_2) = (y_1, y_2)$. Bestimmen Sie außerdem $\varphi'(\frac{1}{2}, 0)$.

Lösungsvorschlag: *Voraussetzung:* Gegeben sei das nichtlineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 - y_1^2 - y_2 &= 0, \\ x_1^2 + 2x_2^2 + 3y_1^2 + 4y_2^2 &= 1, \end{aligned}$$

und $z_0 := (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0)$.
Behauptung: Es existieren offene Mengen $U, V \subset \mathbb{R}^2$ und $\varphi \in C^1(U, \mathbb{R}^2)$ mit $z_0 \in U \times V$ und der Eigenschaft: $(x_1, x_2, y_1, y_2) \in U \times V$ löst das Gleichungssystem genau dann, wenn $\varphi(x_1, x_2) = (y_1, y_2)$. Außerdem ist

$$\varphi'(\frac{1}{2}, 0) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 0 \\ \frac{4}{3} & 0 \end{pmatrix}.$$

Beweis: Wir definieren die Abbildung $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ durch

$$F(x_1, x_2, y_1, y_2) := \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2^2 - y_1^2 - y_2 \\ x_1^2 + 2x_2^2 + 3y_1^2 + 4y_2^2 - 1 \end{pmatrix}.$$

Es ist $F \in C^1(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^2)$ mit $F(x_0, y_0) = 0$ und mit $(x, y) := (x_1, x_2, y_1, y_2)$ gilt für jedes $(x, y) \in \mathbb{R}^4$, dass

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = \begin{pmatrix} -2y_1 & -1 \\ 6y_1 & 8y_2 \end{pmatrix}.$$

und damit

$$\det\Big(\frac{\partial F}{\partial y}(z_0)\Big) = \det \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}}_{=:A} = 3 > 0.$$

Der Satz über implizit definierte Funktionen liefert nun eine offene Menge $U \subset \mathbb{R}^2$ mit $(\frac{1}{2}, 0) \in U$ und $\varphi \in C^1(U, \mathbb{R}^2)$ mit $\varphi(\frac{1}{2}, 0) = (\frac{1}{2}, 0)$ und $F(x_1, x_2, \varphi(x_1, x_2)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ für alle $(x_1, x_2) \in U$. Außerdem liefert der Satz eine offene Menge V mit $\varphi(U) \subset V$ und

$$\forall (x, y) \in U \times V: \ F(x, y) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad y = \varphi(x).$$

Wegen $\det(A) \neq 0$ ist A invertierbar mit

$$A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ferner gilt für $(x,y) \in \mathbb{R}^4$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = \begin{pmatrix} 2x_1 & 2x_2 \\ 2x_1 & 4x_2 \end{pmatrix}$$

und folglich

$$\frac{\partial F}{\partial x}(z_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es somit insgesamt

$$\varphi'(\frac{1}{2},0) = -A^{-1}\frac{\partial F}{\partial x}(z_0) = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 0 \\ \frac{4}{3} & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 59:

Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$f(x,y) := \begin{pmatrix} x^3 - xy^2 \\ x^2y - y^3 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Menge aller $x_0 \in \mathbb{R}^2$ für die offene Mengen $U, V \subset \mathbb{R}^2$ mit $x_0 \in U$ und $f(x_0) \in V$ existieren und $f : U \to V$ bijektiv ist und eine stetig differenzierbare Umkehrfunktion besitzt. Bestimmen Sie in diesem Fall jeweils $(f^{-1})'(f(x_0))$.

Lösungsvorschlag: *Voraussetzung:* Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$f(x,y) := \begin{pmatrix} x^3 - xy^2 \\ x^2y - y^3 \end{pmatrix}.$$

Behauptung: Für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ mit $|x| \neq |y|$ ist f lokal bijektiv, dass heißt es gibt offene Mengen $U, V \subset \mathbb{R}^2$ mit $(x,y) \in U$ und $f(x,y) \in V$ und $f : U \to V$ ist bijektiv. Ferner hat $f|_U$ eine stetig differenzierbare Umkehrfunktion und es gilt

$$(f^{-1})'(f(x,y)) = \frac{1}{3(x^2-y^2)^2}\begin{pmatrix} x^2 - 3y^2 & 2xy \\ -2xy & 3x^2 - y^2 \end{pmatrix}.$$

Für $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ mit $|x| = |y|$ gibt es solche Mengen nicht.
Beweis: Es ist $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ und für $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ gilt

$$f'(x,y) = \begin{pmatrix} 3x^2 - y^2 & -2xy \\ 2xy & x^2 - 3y^2 \end{pmatrix}$$

und damit

$$\det(f'(x,y)) = (3x^2 - y^2)(x^2 - 3y^2) + (2xy)^2 = 3x^4 - 6x^2y^2 + 3y^4 = 3(x^2 - y^2)^2.$$

Hieran erkennt man die Äquivalenz

$$\det(f'(x,y)) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 = y^2 \quad \Longleftrightarrow \quad |x| = |y|\,.$$

Nach dem Umkehrsatz existieren für $(x,y) \in M := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \neq |y|\}$ offene Mengen $U, V \subset \mathbb{R}^2$ mit $(x,y) \in U$ und $f|_U : U \to V$ bijektiv. Dann ist $(f|_U)^{-1} : V \to U$ wohldefiniert und nach dem Umkehrsatz gilt sogar $(f|_U)^{-1} \in C^1(V, \mathbb{R}^2)$ und

$$[(f|_U)^{-1}]'(f|_U(x,y)) = [(f|_U)'(x,y)]^{-1} = \frac{1}{3(x^2-y^2)^2}\begin{pmatrix} x^2 - 3y^2 & 2xy \\ -2xy & 3x^2 - y^2 \end{pmatrix}.$$

— Bitte wenden! —

Der Umkehrsatz liefert aber nur eine hinreichende Bedingung für lokale Umkehrbarkeit. Daher müssen wir die Punkte in M^C separat betrachten. Sei $(x,y) \in M^C$. Dann gilt $x^2 - y^2 = 0$ und daher

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} x^3 - xy^2 \\ x^2y - y^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $x = y > 0$. Es ist $(x,x) \in M^C$. Angenommen für $(x,x) \in \mathbb{R}^2$ mit $x > 0$ existiert eine offene Menge $U \subset \mathbb{R}^2$ mit $(x,x) \in U$ so, dass $f|_U$ injektiv ist. Da U offen ist, existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(x,x) \subset U$, wobei auch $f|_{B_\varepsilon(x,x)}$ injektiv ist. Aber es gilt $(x,x), (x+\frac{\varepsilon}{2}, x+\frac{\varepsilon}{2}) \in M^C \cap U_\varepsilon(x,x)$ und daher $f(x,x) = 0 = f(x+\frac{\varepsilon}{2}, x+\frac{\varepsilon}{2})$. Dies ist ein Widerspruch zur Injektivität von $f|_U$. f ist damit in allen $(x,y) \in M^C$ nicht lokal injektiv, dass heißt es keine offenen Mengen mit den geforderten Eigenschaften.

Aufgabe 60: Die Funktion $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ sei gegeben durch

$$f(x_1,x_2,y_1,y_2) := \begin{pmatrix} \cos x_1 + x_2 - y_1^2 - y_2^2 \\ x_1 - \sin(\pi x_2) - y_1^2 + y_2^2 \end{pmatrix} \quad \text{für alle } x,y \in \mathbb{R}^2.$$

Zeigen Sie, daß durch die Gleichung $f(x_1,x_2,y_1,y_2) = (0,0)$ in einer gewissen Umgebung U von $(0,1)$ eine Funktion g mit $g(0,1) = (1,1)$ und

$$f\big(x_1,x_2,g(x_1,x_2)\big) = (0,0) \qquad \text{für alle } (x_1,x_2) \in U$$

implizit definiert wird, und berechnen Sie die Ableitung $g'(0,1)$.

Lösungsvorschlag: *Voraussetzung.* Die Funktion $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ sei gegeben durch

$$f(x_1,x_2,y_1,y_2) := \begin{pmatrix} \cos x_1 + x_2 - y_1^2 - y_2^2 \\ x_1 - \sin(\pi x_2) - y_1^2 + y_2^2 \end{pmatrix} \quad \text{für alle } x,y \in \mathbb{R}^2.$$

Behauptung. Es gibt eine Umgebung U von $(0,1)$ und eine differenzierbare Funktion $g : U \to \mathbb{R}^2$ mit $g(0,1) = (1,1)$ und

$$f\big(x_1,x_2,g(x_1,x_2)\big) = (0,0) \qquad \text{für alle } (x_1,x_2) \in U,$$

und es gilt $g'(0,1) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1+\pi \\ -1 & 1-\pi \end{pmatrix}$.

Beweis. Offenbar ist die Funktion f stetig differenzierbar. Folglich liefert der Satz über implizit definierte Funktionen den ersten Teil der Behauptung, wenn

$$f(x_0,y_0) = (0,0) \qquad \text{und} \qquad \det\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right) \neq 0$$

für die Punkte $x_0 := (0,1)$ und $y_0 := (1,1)$ gilt. Nun ist in der Tat

$$f(0,1,1,1) = \begin{pmatrix} \cos 0 + 1 - 1^2 - 1^2 \\ 0 - \sin\pi - 1^2 + 1^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

und für die Ableitung bezüglich der Variablen, nach denen wir auflösen wollen, gilt

$$\frac{\partial f}{\partial(y_1,y_2)}(x_1,x_2,y_1,y_2) = \begin{pmatrix} -2y_1 & -2y_2 \\ -2y_1 & 2y_2 \end{pmatrix} \quad \text{für alle } (x,y) \in \mathbb{R}^4, \text{ also } \quad \frac{\partial f}{\partial(y_1,y_2)}(0,1,1,1) = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix hat Determinante $-4-4=-8\neq 0$. Mit dem Satz über implizit definierte Funktionen folgt also der erste Teil der Behauptung sowie

$$g'(x_0) = -\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right)^{-1}\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\,.$$

Wir verwenden die folgende bekannte Formel (falls nicht bekannt, nachrechnen!):

Für eine invertierbaren (2×2)-Matrix $A=\left(\begin{smallmatrix} a & b\\ c & d\end{smallmatrix}\right)\in GL_2(\mathbb{R})$ gilt allgemein $A^{-1}=\frac{1}{\det A}\left(\begin{smallmatrix} d & -b\\ -c & a\end{smallmatrix}\right)$.

Also gilt:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial(y_1,y_2)}(0,1,1,1)\right)^{-1} = -\frac{1}{8}\begin{pmatrix} 2 & 2\\ 2 & -2\end{pmatrix}.$$

Für die Ableitung nach x_1 und x_2 ergibt sich

$$\frac{\partial f}{\partial(x_1,x_2)}(x,y) = \begin{pmatrix} -\sin x_1 & 1\\ 1 & -\pi\cos(\pi x_2)\end{pmatrix} \quad \text{für alle } (x,y)\in\mathbb{R}^4\text{, also} \quad \frac{\partial f}{\partial(x_1,x_2)}(0,1,1,1) = \begin{pmatrix} 0 & 1\\ 1 & \pi\end{pmatrix},$$

und damit erhalten wir schließlich

$$g'(0,1) = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 2 & 2\\ 2 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1\\ 1 & \pi\end{pmatrix} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 2 & 2+2\pi\\ -2 & 2-2\pi\end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1+\pi\\ -1 & 1-\pi\end{pmatrix}.$$

$\square$

Aufgabe 61: (Präsensaufgabe)
Finden Sie jeweils eine Funktion $F\in C^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ mit $F(0,0)=0$, $\frac{\partial F}{\partial y}(0,0)=0$ und der folgenden Eigenschaft.

(a) In jeder Umgebung von 0 gibt es ein x, für das die Gleichung $F(x,y)=0$ keine Lösung besitzt.

(b) Die Gleichung $F(x,y)=0$ hat für jedes $x\neq 0$ genau zwei verschiedene Lösungen (x,y_1) und (x,y_2).

(c) Die Gleichung $F(x,y)=0$ kann in einer Umgebung von 0 eindeutig nach y aufgelöst werden und die Lösung $x\mapsto y(x)$ ist in 0 nicht differenzierbar.

(d) Die Gleichung $F(x,y)=0$ kann in einer Umgebung von 0 eindeutig nach y aufgelöst werden und die Lösung $x\mapsto y(x)$ ist stetig differenzierbar.

Lösungsvorschlag: Die im folgenden definierten Funktionen $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ sind als Polynomfunktionen alle stetig differenzierbar und erfüllen offensichtlich $F(0,0)=0$ sowie $\frac{\partial F}{\partial y}(0,0)=0$.

(a) Definiere $F(x,y):=x^2+y^2$ für $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Für alle $(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ gilt $x^2+y^2>0$. Also hat die Gleichung $F(x,y)=0$ für kein $x\neq 0$ eine Lösung.

(b) Betrachte $F(x,y):=x^4-y^2$ für $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Die Gleichung $x^4=y^2$ ist äquivalent zu $y=\pm x^2$. Also hat die Gleichung $F(x,y)=0$ für jedes $x\neq 0$ genau die beiden Lösungen (x,x^2) und $(x,-x^2)$.

— **Bitte wenden!** —

(c) Definiere $F(x, y) := x - y^3$ für $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Die Gleichung $x = y^3$ hat für jedes $x \in \mathbb{R}$ die eindeutige Lösung $y(x) = \sqrt[3]{x}$. Es ist bekannt, dass die Abbildung $x \mapsto \sqrt[3]{x}$ in 0 nicht differenzierbar ist.

(d) Betrachte $F(x, y) := x^9 - y^3$ für $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Die Gleichung $x^9 = y^3$ hat für $x \in \mathbb{R}$ die eindeutige Lösung $y(x) = x^3$ und die Abbildung $x \mapsto x^3$ ist stetig differenzierbar.

Erinnerung:

- Die Anmeldung für den Übungsschein ist nun möglich. Anmeldeschluss ist der 26.07.2019. Für die Fachrichtungen Mathematik-Bachelor, Mathematik-Lehramt und Informatik ist der Übungsschein Voraussetzung für die Anmeldung zur Prüfung Analysis II.

- Die Klausur zur Vorlesung Analysis 2 findet am **17. September 2019** von **11 - 13 Uhr** statt.

  Die Anmeldung zur Klausur ist ab sofort möglich. **Anmeldeschluss** ist der **01. September 2019**. Eine Anmeldung nach diesem Termin ist **NICHT** möglich.
  Studenten die den Übungsschein benötigen können sich erst anmelden wenn Sie den Übungsschein bestanden haben.

  Die Anmeldung erfolgt über Campus Management für Studierende.
  Diese und weitere Informationen finden Sie unter

  `http://www.math.kit.edu/iana3/~schmoeger/seite/termin/de`