Institut für Analysis
Prof. Dr. Dirk Hundertmark
Dr. Markus Lange

SoSe 2019
18.07.2019

Analysis 2

Aufgabenzettel 13

Es gibt keine K-Aufgaben auf diesem Zettel. Die Lösungen der Aufgaben werden in der Übung am 23.07.2019 besprochen

Aufgabe 62:
Sei $K \subset \mathbb{R}^d$ kompakt und $f : K \to K$ eine Abbildung mit $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$ wobei $d : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ die Abstandsfunktion ist. Zeigen Sie, dass f einen Fixpunkt besitzt.

Definition
Eine Kurve γ heißt rektifizierbar, wenn $L(\gamma) < \infty$ ist.

Aufgabe 63:

(i) Seien $k, l \in \mathbb{N}$ und $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^l$ ein rektifizierbarer Kurve sowie $f : \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^k$ eine Lipschitz stetige Funktion mit Konstante $C > 0$. Zeigen Sie, dass $f \circ \gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^k$ ein rektifizierbarer Kurve ist, die $L(f \circ \gamma) \leq CL(\gamma)$ erfüllt.

(ii) Zeigen Sie, dass die folgenden Kurven rektifizierbar sind und berechnen Sie die Bogenlänge.

a) $\gamma : [-1, 1] \to \mathbb{R}^2$; $\gamma(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}$. b) $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^3$; $\gamma(t) = \begin{pmatrix} t^2 \cos t \\ t^2 \sin t \\ t^3/3 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 64:

(i) Sei $\gamma(t) := e^{-t}(\cos(t), \sin(t))^T$ für $t \geq 0$. Berechnen Sie die Bogenlänge $L(\gamma)$.

(ii) Sei $\gamma(t) := g(t)(\cos(t), \sin(t))^T$ für $t \geq 0$ und sei $g(t) > 0$ für alle $t \geq 0$. Welche Bedingungen muss die Funktion g erfüllen, damit $L(\gamma) < \infty$?

Aufgabe 65: *Für eine Kurve $\gamma \in C([a, b], \mathbb{R}^n)$ heißt $t \mapsto L(\gamma|_{[a,t]})$ die zugehörige Bogenlängenfunktion.*

(i) Bestimmen Sie zu den folgenden Wegen jeweils die zugehörige Bogenlängenfunktion.

a) $\gamma : [0, 4\pi] \to \mathbb{R}^3$ definiert durch $\gamma(t) := \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ \cosh t \end{pmatrix}$.

— Bitte wenden! —

b) $\gamma : [0,5] \to \mathbb{R}^2$ definiert durch $\gamma(t) := \begin{pmatrix} 3t^2 \\ 2t^3 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 66: Berechnen Sie die folgenden Kurvenintegrale $\int_\gamma f \cdot \mathrm{d}\vec{x}$ mit

(i) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch $f(x,y) := \begin{pmatrix} e^x \\ xy \end{pmatrix}$ und $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ definiert durch $\gamma(t) := \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$.

(ii) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definiert durch $f(x,y,z) := \begin{pmatrix} y \\ -z \\ x \end{pmatrix}$ und $\gamma : [0, \ln 3] \to \mathbb{R}^3$ definiert durch $\gamma(t) := \begin{pmatrix} \sinh t \\ \cosh t \\ \sinh t \end{pmatrix}$.

(iii) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch $f(x,y) := \begin{pmatrix} x^2 y \\ -y \end{pmatrix}$ und $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ definiert durch $\gamma(t) := \begin{pmatrix} t^2 \\ t^3 - 1 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 67:
Welche der folgenden Funktionen f besitzt ein Potential? Bestimmen Sie dieses gegebenenfalls.

(i) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$; $f(x,y,z) = (y^2 + 2z^3yx, 2y + z^3x^2, y^2 + 3z^2yx^2)$.

(ii) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$; $f(x,y,z) = (y^2 + 2zx, z^2 + 2xy, x^2 + 2yz)$.

Erinnerung:

- Die Anmeldung für den Übungsschein ist nun möglich. Anmeldeschluss ist der 26.07.2019. Für die Fachrichtungen Mathematik-Bachelor, Mathematik-Lehramt und Informatik ist der Übungsschein Voraussetzung für die Anmeldung zur Prüfung Analysis II.

- Die Klausur zur Vorlesung Analysis 2 findet am **17. September 2019** von **11 - 13 Uhr** statt.

  Die Anmeldung zur Klausur ist ab sofort möglich. **Anmeldeschluss** ist der **01. September 2019**. Eine Anmeldung nach diesem Termin ist **NICHT** möglich.
  Studenten die den Übungsschein benötigen können sich erst anmelden wenn Sie den Übungsschein bestanden haben.

  Die Anmeldung erfolgt über Campus Management für Studierende.
  Diese und weitere Informationen finden Sie unter

  `http://www.math.kit.edu/iana3/~schmoeger/seite/termin/de`