Institut für Analysis
Prof. Dr. Dirk Hundertmark
Dr. Markus Lange

SoSe 2019
18.07.2019

Analysis 2

Aufgabenzettel 13

Es gibt keine K-Aufgaben auf diesem Zettel. Die Lösungen der Aufgaben werden in der Übung am 23.07.2019 besprochen

Aufgabe 62:
Sei $\emptyset \neq K \subset \mathbb{R}^d$ kompakt und $f : K \to K$ eine Abbildung mit $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$ wobei $d : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ die Abstandsfunktion ist. Zeigen Sie, dass f einen Fixpunkt besitzt.

Lösungsvorschlag: Wir definieren $h(x) := d(f(x), x)$ und nehmen an, dass $h(x) > 0$ für alle $x \in K$. Also das es keinen Fixpunkt gibt. Da f stetig ist folgt auch dass h stetig ist. Somit gilt, da K kompakt ist, dass h sein Minimum auf der Menge K annimmt. Sei $\alpha := \min_{x \in K} h(x)$. Da $h(x) > 0$ für alle $x \in K$ gilt also auch $\alpha > 0$. Weiter muss es ein $\tilde{x} \in K$ geben, so dass $h(\tilde{x}) = \alpha$. Per Voraussetzung gilt nun aber

$$d(f(f(\tilde{x})), f(\tilde{x})) < d(f(\tilde{x}), \tilde{x}) = h(\tilde{x}) = \alpha \qquad ↯$$

Dies widerspricht das α das Minimum von h auf der Menge K ist. Somit muss ein $x \in K$ existieren, so dass $h(x) = 0$ also $f(x) = x$ ist. □

Definition
Eine Kurve γ heißt rektifizierbar, wenn $L(\gamma) < \infty$ ist.

Aufgabe 63:

(i) Seien $k, l \in \mathbb{N}$ und $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^l$ ein rektifizierbare Kurve sowie $f : \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^k$ eine Lipschitz stetige Funktion mit Konstante $C > 0$. Zeigen Sie, dass $f \circ \gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^k$ ein rektifizierbare Kurve ist, die $L(f \circ \gamma) \leq CL(\gamma)$ erfüllt.

(ii) Zeigen Sie, dass die folgenden Kurven rektifizierbar sind und berechnen Sie die Bogenlänge.

a) $\gamma : [-1, 1] \to \mathbb{R}^2;\ \gamma(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}$. b) $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^3;\ \gamma(t) = \begin{pmatrix} t^2 \cos t \\ t^2 \sin t \\ t^3/3 \end{pmatrix}$.

Lösungsvorschlag:

(i) Seien $k, l \in \mathbb{N}$ und $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^l$ ein rektifizierbare Kurve sowie $f : \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^k$ eine Lipschitz stetige Funktion mit Konstante $C > 0$.
Behauptung. Die Kurve $f \circ \gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^k$ ist rektifizierbar und erfüllt $L(f \circ \gamma) \leq CL(\gamma)$.

— Bitte wenden! —

Beweis. Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei $Z = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ eine Zerlegung von $[0, 1]$. Dann gilt

$$L(f \circ \gamma, Z) = \sum_{k=1}^{n} |f(\gamma(t_k)) - f(\gamma(t_{k-1}))|_2 \leq C \sum_{k=1}^{n} |\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})|_2 = CL(\gamma, Z).$$

Bildet man in obiger Ungleichung das Supremum über alle Zerlegungen von $[0, 1]$, so erhält man die Rektifizierbarkeit von $f \circ \gamma$ zusammmen mit der Abschätzung $L(f \circ \gamma) \leq CL(\gamma)$. $\square$

(ii) Sei $\gamma : [-1, 1] \to \mathbb{R}^2$; $\gamma(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}$.

Behauptung. Die Kurve γ ist rektifizierbar und erfüllt $L(\gamma) = \frac{2}{27}(13^{3/2} - 8)$.

Beweis. Dir Kurve γ ist offensichtlich stetig differenzierbar, also nach einem Satz aus der Vorlesung auch rektifizierbar. Somit können wir die Bogenlänge mit der Formel über die Ableitung berechnen. Es gilt

$$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ 3t^2 \end{pmatrix}$$

und folglich $|\gamma'(t)|_2 = (4t^2 + 9t^4)^{1/2}$ für alle $t \in [-1, 1]$. Mit Symmetrie und der Substitution $s = t^2$ erhalten wir somit

$$L(\gamma) = \int_{-1}^{1} \left|\gamma'(t)\right|_2 \mathrm{d}t = 2 \int_0^1 t(4 + 9t^2)^{1/2} \mathrm{d}t = \int_0^1 (4 + 9s)^{1/2} \mathrm{d}s = \frac{2}{27}(13^{3/2} - 8). \quad \square$$

(iii) Sei $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^3$; $\gamma(t) = \begin{pmatrix} t^2 \cos t \\ t^2 \sin t \\ t^3/3 \end{pmatrix}$.

Behauptung. Die Kurve γ ist rektifizierbar und erfüllt $L(\gamma) = \sqrt{6} - \frac{4}{3}$.

Beweis. Die Kurve γ ist offensichtlich stetig differenzierbar, also auch rektifizierbar und wir können die Bogenlänge mit der Formel über die Ableitung berechnen. Es gilt

$$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} 2t \cos t - t^2 \sin t \\ 2t \sin t + t^2 \cos t \\ t^2 \end{pmatrix}$$

und folglich (verwende $\sin^2 + \cos^2 = 1$) $|\gamma'(t)|_2 = (4t^2 + 2t^4)^{1/2}$ für alle $t \in [0, 1]$. Wieder mit der Substitution $s = t^2$ ergibt sich

$$L(\gamma) = \int_0^1 \left|\gamma'(t)\right|_2 \mathrm{d}t = \int_0^1 t(4 + 2t^2)^{1/2} \mathrm{d}t = \frac{1}{2} \int_0^1 (4 + 2s)^{1/2} \mathrm{d}s = \sqrt{6} - \frac{4}{3}. \quad \square$$

Aufgabe 64:

(i) Sei $\gamma(t) := e^{-t}(\cos(t), \sin(t))^T$ für $t \geq 0$. Berechnen Sie die Bogenlänge $L(\gamma)$.

(ii) Sei $\gamma(t) := g(t)(\cos(t), \sin(t))^T$ für $t \geq 0$ und sei $g(t) > 0$ für alle $t \geq 0$. Welche Bedingungen muss die Funktion g erfüllen, damit $L(\gamma) < \infty$?

Lösungsvorschlag:

(i) Die Kurve $\gamma(t) := e^{-t}(\cos(t), \sin(t))^T$ ist stetig differenzierbar für alle $t \geq 0$. Somit also rektifizierbar. Wir bestimmen die Bogenlänge also wieder über die bekannte Formel über die Ableitung

$$L(\gamma) = \int_0^\infty \left|\frac{\partial}{\partial t} e^{-t}\big(\cos(t), \sin(t)\big)^T\right| dt = \int_0^\infty \sqrt{(-e^{-t})^2\big(\sin^2(t) + \cos^2(t)\big)}\, dt$$
$$= \int_0^\infty e^{-t}\, dt$$
$$= -e^{-t}|_0^\infty = 1\,.$$

(ii) Sei nun $\gamma(t) := g(t)(\cos(t), \sin(t))^T$ für $t \geq 0$ mit $g(t) > 0$ für alle $t \geq 0$. Aus der Definition der Bogenlänge aus der Vorlesung folgt, dass $g(t)$ eine Stammfunktion sein muss. Um die Bogenlänge zu bestimmen wird in einem Schritt der Wert des folgenden Integrals benötigt

$$\int_0^\infty \sqrt{(g'(t))^2}\, dt\,.$$

Dies sieht man auch z.B. anhand des Teil (i) sehr gut. Damit dieses Integral wohldefiniert und endlich ist muss $\int_0^\infty g'(t)\, dt$ existieren und endlich sein, also $g(t)$ stetig auf $[0, \infty)$, stückweise C^1 auf $(0, \infty)$ und $g(t) < \infty$ für alle $t > 0$.

Aufgabe 65: *Für eine Kurve $\gamma \in C([a, b], \mathbb{R}^n)$ heißt $t \mapsto L(\gamma|_{[a,t]})$ die zugehörige Bogenlängenfunktion.*

(i) Bestimmen Sie zu den folgenden Wegen jeweils die zugehörige Bogenlängenfunktion.

a) $\gamma : [0, 4\pi] \to \mathbb{R}^3$ definiert durch $\gamma(t) := \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ \cosh t \end{pmatrix}$.

b) $\gamma : [0, 5] \to \mathbb{R}^2$ definiert durch $\gamma(t) := \begin{pmatrix} 3t^2 \\ 2t^3 \end{pmatrix}$.

Lösungsvorschlag: *Für einen Weg $\gamma \in C([a, b], \mathbb{R}^n)$ heißt $t \mapsto L(\gamma|_{[a,t]})$ die zugehörige Weglängenfunktion.*

(i) a) *Voraussetzung:* Sei $\gamma : [0, 4\pi] \to \mathbb{R}^3$ definiert durch $\gamma(t) := \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ \cosh t \end{pmatrix}$.

Behauptung: Die zu γ gehörige Bogenlängenfunktion ist $s : [0, 4\pi] \to \mathbb{R}$ definiert durch $s(t) := \sinh(t)$.

Beweis: Da γ stetig differenzierbar ist, ist die zugehörige Bogenlängenfunktion $s : [0, 4\pi] \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$s(t) := \int_0^t \left|\gamma'(\tau)\right|\, \mathrm{d}\tau.$$

Wegen $\gamma'(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ \sinh t \end{pmatrix}$ für alle $t \in [0, 4\pi]$ gilt

$$\left|\gamma'(t)\right| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + \sinh^2 t} = \sqrt{1 + \sinh^2 t} = \sqrt{\cosh^2 t} = \cosh t$$

und somit

$$s(t) = \int_0^t \cosh \tau\, \mathrm{d}\tau = [\sinh \tau]_0^t = \sinh t.$$

— Bitte wenden! —

b) *Voraussetzung:* Sei $\gamma : [0,5] \to \mathbb{R}$ definiert durch $\gamma(t) := \begin{pmatrix} 3t^2 \\ 2t^3 \end{pmatrix}$.
Behauptung: Die zu γ gehörende Bogenlängenfunktion ist $s : [0,5] \to \mathbb{R}$ definiert durch $s(t) := 2(1+t^2)^{3/2} - 2$.
Beweis: Da γ stetig differenzierbar ist, gilt für die zugehörige Bogenlängenfunktion $s : [0,5] \to \mathbb{R}$, dass sie gegeben ist durch

$$s(t) := \int_0^t \left|\gamma'(\tau)\right| \, \mathrm{d}\tau.$$

Mit $\gamma'(t) = \begin{pmatrix} 6t \\ 6t^2 \end{pmatrix}$ folgt also

$$\begin{aligned} s(t) &= \int_0^t \left|\gamma'(\tau)\right| \, \mathrm{d}\tau = \int_0^t \sqrt{36\tau^2 + 36\tau^4} \, \mathrm{d}\tau = \int_0^t 6\tau\sqrt{1+\tau^2} \, \mathrm{d}\tau \\ &= [6 \cdot \frac{1}{3}(1+\tau^2)^{3/2}]_0^t = 2(1+t^2)^{3/2} - 2. \end{aligned}$$

Aufgabe 66: Berechnen Sie die folgenden Kurvenintegrale $\int_\gamma f \cdot \mathrm{d}\vec{x}$ mit

(i) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch $f(x,y) := \begin{pmatrix} e^x \\ xy \end{pmatrix}$ und $\gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$ definiert durch $\gamma(t) := \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$.

(ii) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definiert durch $f(x,y,z) := \begin{pmatrix} y \\ -z \\ x \end{pmatrix}$ und $\gamma : [0,\ln 3] \to \mathbb{R}^3$ definiert durch $\gamma(t) := \begin{pmatrix} \sinh t \\ \cosh t \\ \sinh t \end{pmatrix}$.

(iii) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch $f(x,y) := \begin{pmatrix} x^2 y \\ -y \end{pmatrix}$ und $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ definiert durch $\gamma(t) := \begin{pmatrix} t^2 \\ t^3 - 1 \end{pmatrix}$.

Lösungsvorschlag:

(i) *Voraussetzung:* Sei $: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch $f(x,y) := \begin{pmatrix} e^x \\ xy \end{pmatrix}$ und sei $\gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$ definiert durch $\gamma(t) := \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$.
Behauptung: Es gilt $\int_\gamma f(x) \, \mathrm{d}x = 0$.
Beweis: Da f stetig und γ stetig differenzierbar ist mit

$$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

für alle $t \in [0, 2\pi]$, gilt

$$\begin{aligned}
\int_\gamma f(x,y)\, \mathrm{d}(x,y) &= \int_0^{2\pi} f(\cos t, \sin t) \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} \big(-e^{\cos t} \sin t + \sin t \cos^2 t\big)\, \mathrm{d}t \\
&= \big[e^{\cos t} - \frac{1}{3}\cos^3 t\big]_0^{2\pi} = \big(e - \frac{1}{3}\big) - \big(e - \frac{1}{3}\big) = 0.
\end{aligned}$$

(ii) *Voraussetzung:* Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definiert durch $f(x,y,z) := \begin{pmatrix} y \\ -z \\ x \end{pmatrix}$ und sei $\gamma : [0, \ln 3] \to \mathbb{R}^3$ definiert durch $\gamma(t) := \begin{pmatrix} \sinh t \\ \cosh t \\ \sinh t \end{pmatrix}$.
Behauptung: Es gilt $\int_\gamma f(x)\, \mathrm{d}x = \ln 3 + \frac{8}{9}$.
Beweis: Da f stetig und γ stetig differenzierbar ist mit

$$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} \cosh t \\ \sinh t \\ \cosh t \end{pmatrix}$$

für alle $t \in [0, \ln 3]$, gilt

$$\begin{aligned}
\int_\gamma f(x,y,z)\, \mathrm{d}(x,y,z) &= \int_0^{\ln 3} f(\sinh t, \cosh t, \sinh t) \cdot \begin{pmatrix} \cosh t \\ \sinh t \\ \cosh t \end{pmatrix} \mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\ln 3} \big(\cosh^2 t - \sinh^2 t + \sinh t \cosh t\big)\, \mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\ln 3} \big(1 + \sinh t \cosh t\big)\, \mathrm{d}t \\
&= \big[t + \frac{1}{2}\sinh^2 t\big]_0^{\ln 3} = \ln 3 + \frac{1}{2}\left(\frac{3 - \frac{1}{3}}{2}\right)^2 \\
&= \ln 3 + \frac{8}{9}.
\end{aligned}$$

(iii) *Voraussetzung:* Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch $f(x,y) := \begin{pmatrix} x^2 y \\ -y \end{pmatrix}$ und sei $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ definiert durch $\gamma(t) := \begin{pmatrix} t^2 \\ t^3 - 1 \end{pmatrix}$.
Behauptung: Es gilt $\int_\gamma f(x)\, \mathrm{d}x = \frac{7}{18}$.
Beweis: Da f stetig und γ stetig differenzierbar ist mit

$$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ 3t^2 \end{pmatrix}$$

— Bitte wenden! —

für alle $t \in [0,1]$, gilt

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) &= \int_0^1 f(t^2,t^3-1)\cdot\begin{pmatrix}2t\\3t^2\end{pmatrix}\mathrm{d}t\\ &= \int_0^1 \big(t^4(t^3-1)\cdot 2t-(t^3-1)\cdot 3t^2\big)\,\mathrm{d}t\\ &= \int_0^1 (2t^8-5t^5+3t^2)\,\mathrm{d}t\\ &= \big[\frac{2}{9}t^9-\frac{5}{6}t^6+t^3\big]_0^1=\frac{7}{18}.\end{aligned}$$

Aufgabe 67:

Welche der folgenden Funktionen f besitzt ein Potential? Bestimmen Sie dieses gegebenenfalls.

(i) $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$; $f(x,y,z)=(y^2+2z^3yx, 2y+z^3x^2, y^2+3z^2yx^2)$.

(ii) $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$; $f(x,y,z)=(y^2+2zx, z^2+2xy, x^2+2yz)$.

Lösungsvorschlag:

(i) *Behauptung.* Die Funktion $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$; $f(x,y,z)=(y^2+2z^3yx, 2y+z^3x^2, y^2+3z^2yx^2)$ besitzt kein Potential.

Beweis. Offensichtlich gilt $f\in C^1(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^3)$ und für $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ mit $y\neq 0$ gilt

$$\partial_1 f_2(x,y,z)=2xz^3\neq 2y+2xz^3=\partial_2 f_1(x,y,z).$$

Also erfüllt f die Integrabilitätsbedingung aus der Vorlesung nicht und es folgt, dass f kein Potential besitzt. □

(ii) *Behauptung.* Die Funktion $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$; $f(x,y,z)=(y^2+2zx, z^2+2xy, x^2+2yz)$ besitzt das Potential $\Phi:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ gegeben durch $\Phi(x,yz)=xy^2+x^2z+yz^2$.

Beweis. Offensichtlich gilt $\Phi\in C^1(\mathbb{R}^3,\mathbb{R})$ und für alle $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ gilt

$$\nabla\Phi(x,y,z)=\begin{pmatrix}y^2+2zx\\z^2+2xy\\x^2+2yz\end{pmatrix}=f(x,y,z).$$ □

Erinnerung:

- Die Anmeldung für den Übungsschein ist nun möglich. Anmeldeschluss ist der 26.07.2019. Für die Fachrichtungen Mathematik-Bachelor, Mathematik-Lehramt und Informatik ist der Übungsschein Voraussetzung für die Anmeldung zur Prüfung Analysis II.

- Die Klausur zur Vorlesung Analysis 2 findet am **17. September 2019** von **11 - 13 Uhr** statt.

  Die Anmeldung zur Klausur ist ab sofort möglich. **Anmeldeschluss** ist der **01. September 2019**. Eine Anmeldung nach diesem Termin ist **NICHT** möglich.
  Studenten die den Übungsschein benötigen können sich erst anmelden wenn Sie den Übungsschein bestanden haben.
  Die Anmeldung erfolgt über Campus Management für Studierende.
  Diese und weitere Informationen finden Sie unter

  `http://www.math.kit.edu/iana3/~schmoeger/seite/termin/de`