Institut für Analysis
Prof. Dr. Dirk Hundertmark
Dr. Markus Lange

WiSe 2018/2019
23.04.2019

Analysis 2

Aufgabenzettel 1

Aufgabe 1:

Untersuchen Sie die angegebenen Funktionenfolgen auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz.

(i) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $f_n : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ definiert durch $f_n(x) := \frac{nx^2}{1+n^2x^4}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(ii) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ definiert durch $f_n(x) := \sqrt[n]{n^2x}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(iii) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $f_n : [a,1] \to \mathbb{R}$ definiert durch $f_n(x) := nx(1-x)^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ für ein $a \in (0,1)$.

Lösungsvorschlag:

(i) *Behauptung:* Die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $f_n : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ definiert durch $f_n(x) := \frac{nx^2}{1+n^2x^4}$ konvergiert punktweise, aber nicht gleichmäßig gegen die Nullfunktion.
Beweis: Für alle $x \in [0,\infty)$ gilt

$$f_n(x) = \frac{x^2}{\frac{1}{n} + nx^4} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

Somit konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise gegen die Nullfunktion.
Definiere $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ durch $f(x) := 0$. Setze $x_n := \frac{1}{\sqrt{n}}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$|f_n(x_n) - f(x_n)| = \left|\frac{1}{1+1} - 0\right| = \frac{1}{2}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Also gilt

$$\sup_{x\in[0,\infty)} |f_n(x) - f(x)| \geq |f_n(x_n) - f(x_n)| = \frac{1}{2}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Daher konvergiert $\sup_{x\in[0,\infty)} |f_n(x) - f(x)|$ nicht gegen 0 für $n \to \infty$, d.h. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert nicht gleichmäßig gegen f für $n \to \infty$.

(ii) *Behauptung:* Die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ definiert durch $f_n(x) := \sqrt[n]{n^2x}$ konvergiert punktweise, aber nicht gleichmäßig gegen die Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} 1, & x \in (0,1], \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Beweis: Für alle $x \in (0,1]$ gilt

$$f_n(x) = \left(\sqrt[n]{n}\right)^2 \cdot \sqrt[n]{x} \xrightarrow{n\to\infty} 1\,.$$

Für $x = 0$ gilt $f_n(0) = 0 \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Daher konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise gegen die Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} 1, & x \in (0,1], \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Da alle f_n stetig sind, die punktweise Grenzfunktion f aber nicht, kann die Konvergenz nicht gleichmäßig sein.

(iii) *Behauptung:* Die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $f_n : [a,1] \to \mathbb{R}$ für ein $a \in (0,1)$ definiert durch $f_n(x) := nx(1-x)^n$ konvergiert punktweise und gleichmäßig gegen die Nullfunktion.
Beweis: Es gilt

$$|f_n(x)| \leq n \cdot 1 \cdot (1-a)^n \tag{1}$$

für alle $x \in [a,1]$ und alle $n \in \mathbb{N}$. Wegen

$$\sqrt[n]{n(1-a)^n} = \sqrt[n]{n} \cdot (1-a) \to 1-a < 1$$

für $n \to \infty$ konvergiert die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n(1-a)^n$ nach dem Wurzelkriterium. Nach dem Nullfolgenkriterium ist daher $(n(1-a)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge. Definiere $f : [a,1] \to \mathbb{R}$ durch $f(x) := 0$ für alle $x \in [a,1]$. Dann haben wir mit Abschätzung (1)

$$\sup_{x\in[a,1]} |f_n(x) - f(x)| \leq \sup_{x\in[a,1]} n(1-a)^n = n(1-a)^n \xrightarrow{n\to\infty} 0\,.$$

Also konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig und daher auch punktweise gegen f.

Aufgabe 2:

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte.

(i) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(\sin x)}{x}$

(ii) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^x - x}{1-x+\ln x}$

(iii) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2 + x\ln x}{x^3+1}$

(iv) $\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x$, wobei $a \in (0,\infty)$ sei.

Lösungsvorschlag:

(i) *Behauptung:* Es gilt $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(\sin x)}{x} = 1$.
Beweis: Wir erhalten mit der Regel von L'Hospital

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\sin x)}{x} \overset{''\frac{0}{0}''}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos(\sin x)\cos x}{1} = \frac{1}{1} = 1.$$

(ii) *Behauptung:* Es gilt $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^x - x}{1-x+\ln x} = -2$.
Beweis: Die Ableitung der Funktion $x \mapsto x^x$ ist wegen $x^x = \exp(x\ln x)$ durch

$$\exp(x\ln x)(\ln x + 1) = x^x(\ln x + 1)$$

gegeben. Zweifaches Anwenden der Regel von L'Hospital liefert

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\frac{x^x - x}{1-x+\ln x} &\overset{''\frac{0}{0}''}{=} \lim_{x\to 1}\frac{x^x(\ln x+1)-1}{-1+\frac{1}{x}}\\ &\overset{''\frac{0}{0}''}{=} \lim_{x\to 1}\frac{x^x(\ln x+1)^2+x^x\cdot\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \frac{1+1}{-1} = -2.\end{aligned}$$

(iii) *Behauptung:* Es gilt $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+x\ln x}{x^3+1} = 0$.
Beweis: Indem man die Regel von L'Hospital zweimal hintereinander anwendet erhält man

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x\ln x}{x^3+1} &\overset{''\frac{\infty}{\infty}''}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{2x+\ln x+1}{3x^2}\\ &\overset{''\frac{\infty}{\infty}''}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{1}{x}}{6x}\\ &= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{3x}+\frac{1}{6x^2}\right) = 0.\end{aligned}$$

(iv) Per Definition gilt

$$\left(1+\frac{a}{x}\right)^x = \exp\left(x\ln\left(1+\frac{a}{x}\right)\right) \quad \text{für } x\in(0,\infty).$$

Wenn der Grenzwert $\lim_{x\to\infty} x\ln\left(1+\frac{a}{x}\right)$ in $\mathbb{R}$ existiert, dann folgt aus der Stetigkeit der Exponentialfunktion die Existenz des Grenzwerts

$$\lim_{x\to\infty}\exp\left(x\ln\left(1+\frac{a}{x}\right)\right) = \exp\left(\lim_{x\to\infty} x\ln\left(1+\frac{a}{x}\right)\right).$$

Sei $f:(0,\infty)\to\mathbb{R};\ w\mapsto\frac{\ln(1+aw)}{w}$, dann gilt

$$x\ln\left(1+\frac{a}{x}\right) = \frac{\ln\left(1+\frac{a}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = f(\tfrac{1}{x}).$$

Nun beachte man, dass $\frac{1}{x}\to 0^+$ für $x\to\infty$. Außerdem wissen wir, dass

$$\lim_{w\to 0^+}\ln(1+aw) = \ln 1 = 0.$$

Also dürfen wir die Regel von L'Hospital anwenden und wir erhalten

$$\lim_{w\to 0^+}\frac{\ln(1+aw)}{w} = \lim_{w\to 0^+}\frac{\frac{1}{1+aw}a}{1} = a.$$

Insgesamt folgt hieraus

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x = \exp\left(\lim_{x\to\infty} x\ln\left(1+\frac{a}{x}\right)\right) = \exp\left(\lim_{x\to\infty} f(\tfrac{1}{x})\right) = \exp(a) = e^a.$$

— Bitte wenden! —

Aufgabe 3:

(i) Berechnen Sie $\tan(1/10)$ näherungsweise mit Hilfe des Taylorpolynoms $T_{3,0}\tan$. Zeigen Sie auch, dass der Fehler kleiner als $\frac{10}{3} \cdot 10^{-4}$ ist.

(ii) Sei $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ein Polynome 3. Grades mit

$$p(1) = -1, \quad p'(1) = 0, \quad p''(1) = 2, \quad p'''(1) = -12$$

Stellen Sie die Taylorpolynome $T_2[p, 2]$, $T_3[p, 2]$, $T_5[p, 2]$ von p im Entwicklungspunkt $x_0 = 2$ auf.

Lösungsvorschlag:

(i) Um die Taylorpolynome aufzustellen berechen wir die ersten Ableitungen von $\tan =: f$. Aus der Vorlesung wissen wir, dass $f'(x) = \tan^2 x + 1$ für $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Weiter haben wir nach Ketten- und Produktregel

$$\begin{aligned}
f''(x) &= \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\tan^2 x + 1\right] = 2\tan x \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\tan x\right] \\
&= 2\tan x(\tan^2 x + 1) = 2\tan^3 x + 2\tan x \\
f'''(x) &= 2\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\tan^3 x + \tan x\right] = 2\left(3\tan^2 x \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\tan x\right] + \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\tan x\right]\right) \\
&= 6\tan^2 x(\tan^2 x + 1) + 2(\tan^2 x + 1) = 6\tan^4 x + 8\tan^2 x + 2
\end{aligned}$$

Die Werte dieser Funktionen im Entwicklungspunkt 0 sind $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = 0$ und $f'''(0) = 2$. Somit ergibt sich das Taylorpolynom

$$T_{3,0}f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{6}x^3 = x + \frac{1}{3}x^3$$

Hiermit berechnen wir $T_{3,0}(\frac{1}{10}) = \frac{1}{10} + \frac{1}{3}\frac{1}{1000} = \frac{301}{3000} = 0.100\overline{3}$

Für die Fehlerabschätzung benötigen wir die vierte Ableitung

$$\begin{aligned}
f^{(4)}(x) &= \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[6\tan^4 x + 8\tan^2 x + 2\right] \\
&= 6 \cdot 4\tan^3 x(\tan^2 x + 1) + 8 \cdot 2\tan x(\tan^2 x + 1) \\
&= 24\tan^5 x + 40\tan^3 x + 16\tan x.
\end{aligned}$$

Der Satz von Taylor liefert ein $\xi \in (0, \frac{1}{10})$ mit $f(\frac{1}{10}) - T_{3,0}f(\frac{1}{10}) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{24}(\frac{1}{10})^4$. Verwenden wir, dass $\xi < \frac{1}{10} < \frac{\pi}{4}$ und außerdem, dass tan wachsend ist mit $\tan\frac{\pi}{4} = 1$, erhalten wir $f^{(4)}(\xi) \leq 24 + 40 + 16 = 80$, woraus

$$\left|\tan\tfrac{1}{10} - T_{3,0}f(\tfrac{1}{10})\right| = \frac{\left|f^{(4)}(\xi)\right|}{24}\left(\tfrac{1}{10}\right)^4 \leq \tfrac{80}{24}10^{-4} = \tfrac{10}{3} \cdot 10^{-4}$$

folgt. (Mit $\xi < \frac{1}{10} < \frac{\pi}{6}$ und $\tan\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ erhält man sogar $\left|\tan\frac{1}{10} - T_{3,0}f(\frac{1}{10})\right| \leq \frac{20}{27\sqrt{3}} \cdot 10^{-4}$ was deutlich kleiner ist.)

(ii) Als erstes berechnen wir die Koeffizienten des Polynoms p. Wenn $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ für $x \in \mathbb{R}$ und Zahlen $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, dann erhalten wir die Bedingungen

$$\begin{aligned}
a + b + c + d &= p(1) = -1, \\
3a + 2b + c &= p'(1) = 0, \\
6a + 2b &= p''(1) = 2, \\
6a &= p'''(1) = -12.
\end{aligned}$$

Das ist ein lineares Gleichungssystem für a, b, c, d. Mit den Methoden der Linearen Algebra sehen wir, das es genau eine Lösung hat, nämlich $a = -2$, $b = 7$, $c = -8$ und $d = 2$. Das bedeutet, es gilt $p(x) = -2x^3 + 7x^2 - 8x + 2$ und wir berechnen die Werte

$$\begin{aligned}
p(2) &= -2 \cdot 8 + 7 \cdot 4 - 8 \cdot 2 + 2 = -2 \\
p'(2) &= -6 \cdot 4 + 14 \cdot 2 - 8 = -4 \\
p''(2) &= -12 \cdot 2 + 14 = -10 \\
p'''(2) &= -12 \\
p^{(4)}(2) &= p^{(k)}(x) = 0 \qquad \text{für } k \geq 4 \text{ und } x \in \mathbb{R}\,.
\end{aligned}$$

Es ergeben sich die folgenden Taylorpolynome im Entwicklungspunkt $x_0 = 2$

$$\begin{aligned}
T_2[p,2](x) &= p(2) + p'(2)(x-2) + \frac{p''(2)}{2}(x-2)^2 = -2 - 4(x-2) - 5(x-2)^2\,, \\
T_3[p,2](x) &= T_2[p,2](x) + \frac{p'''(2)}{6}(x-2)^3 = -2 - 4(x-2) - 5(x-2)^2 - 2(x-2)^3\,, \\
T_5[p,2]p(x) &= T_3[p,2](x) + \frac{p^{(4)}(2)}{24}(x-2)^4 + \frac{p^{(5)}(2)}{120}(x-2)^5 = T_3[p,2](x)\,.
\end{aligned}$$

Aufgabe 4:
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

(i) Beweisen Sie $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ (d.h. f ist unendlich oft differenzierbar auf $\mathbb{R}$) und berechnen Sie $f^{(n)}(0)$ für jedes $n \in \mathbb{N}_0$.

(ii) Stellen Sie die Taylorreihe von f um $x_0 = 0$ auf. Bestimmen Sie ihren Konvergenzradius und zeigen Sie, das diese Taylorreihe in keiner Umgebung von 0 mit f übereinstimmt.

Hinweis zu (a): Zeigen Sie $p(1/x)f(x) \to 0$ für $x \to 0$ für jedes Polynom p und ferner für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ die Existenz eines Polynoms p_n mit $f^{(n)}(x) = p_n(1/x)f(x)$ für $x \neq 0$.

Lösungsvorschlag: *Voraussetzung:* Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

(i) *Behauptung:* Es gilt $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ und $f^{(n)}(0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.
Beweis: Wir zeigen vorab allgemein: Für jede Polynomfunktion $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt

$$p\left(\frac{1}{x}\right) f(x) \to 0 \tag{2}$$

für $x \to 0$.
Beweis von (2): Sei $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Polynomfunktion. Dann findet man ein $d \in \mathbb{N}_0$ und $a_0, \ldots, a_d \in \mathbb{R}$ mit $p(y) = \sum\limits_{j=0}^{d} a_j\, y^j$ für alle $y \in \mathbb{R}$. Für $x \neq 0$ substituieren wir $y := \frac{1}{x^2}$. Damit gilt $y \to \infty$ für $x \to 0$. Wegen $\frac{y^\alpha}{e^y} \to 0$ für $y \to \infty$ und jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ folgt

$$\left| p\left(\frac{1}{x}\right) f(x) \right| \leq \sum_{j=0}^{d} |a_j| \left(\frac{1}{|x|}\right)^j \cdot e^{-1/x^2} = \sum_{j=0}^{d} |a_j|\, \frac{y^{j/2}}{e^y} \to \sum_{j=0}^{d} |a_j| \cdot 0 = 0$$

für $x \to 0$. Also gilt $\lim\limits_{x \to 0} p\left(\frac{1}{x}\right) f(x) = 0$.

— Bitte wenden! —

Weiter ist klar, dass f auf der offenen Menge $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ als Komposition von C^∞-Funktionen unendlich oft differenzierbar ist. Zur Berechnung der Ableitung zeigen wir durch vollständige Induktion, dass man zu jedem $n \in \mathbb{N}_0$ eine Polynomfunktion $p_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f^{(n)}(x) = p_n\left(\frac{1}{x}\right) f(x) \tag{3}$$

für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ findet.
Induktionsanfang: Definiere $p_0(y) := 1$ für alle $y \in \mathbb{R}$. Dann gilt offensichtlich

$$f^{(0)}(x) = f(x) = p_0\left(\frac{1}{x}\right) \cdot f(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
Induktionsschluss: Sei $k \in \mathbb{N}_0$. Für dieses k gelte die Induktionsvoraussetzung, d.h. wir finden eine Polynomfunktion p_k mit $f^{(k)}(x) = p_k\left(\frac{1}{x}\right) f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Es gilt

$$f'(x) = e^{-1/x^2} \cdot \frac{2}{x^3} = f(x) \cdot \left(\frac{2}{x^3}\right)$$

für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Nach der Produkt- und der Kettenregel sowie der Induktionsvoraussetzung gilt daher insgesamt

$$\begin{aligned} f^{(k+1)}(x) &= \left(f^{(k)}\right)'(x) = p_k'\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) \cdot f(x) + p_k\left(\frac{1}{x}\right) \cdot f(x) \cdot \left(\frac{2}{x^3}\right) \\ &= \left(2 \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^3 \cdot p_k\left(\frac{1}{x}\right) - \left(\frac{1}{x}\right)^2 \cdot p_k'\left(\frac{1}{x}\right)\right) \cdot f(x) \end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Da Ableitungen von Polynomfunktionen wieder Polynomfunktionen sind, definiert $p_{k+1}(y) := 2y^3 \cdot p_k(y) - y^2 \cdot p_k'(y)$ für alle $y \in \mathbb{R}$ eine Polynomfunktion p_{k+1} und nach dem eben Gezeigten gilt $f^{(k+1)}(x) = p_{k+1}\left(\frac{1}{x}\right) f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Schließlich zeigen wie durch vollständige Induktion

$$f \in C^n(\mathbb{R}) \text{ und } f^{(n)}(0) = 0 \tag{4}$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$.
Induktionsanfang: f ist stetig auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, und nach (2) gilt auch $f(x) \to 0 = f(0)$ für $x \to 0$. Also ist $f \in C^0(\mathbb{R})$ mit $f(0) = 0$.
Induktionsschluss: Sei $k \in \mathbb{N}_0$. Für dieses k gelte die Induktionsvoraussetzung

$$f \in C^k(\mathbb{R}) \text{ und } f^{(k)}(0) = 0.$$

Es wurde bereits gezeigt, dass $f^{(k)}$ auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ differenzierbar ist. Es bleibt also nur zu zeigen, dass $f^{(k)}$ auch in 0 differenzierbar ist mit $f^{(k+1)}(0) = 0$. Für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gilt

$$\frac{f^{(k)}(x) - f^{(k)}(0)}{x - 0} \overset{\text{(I.V.)}}{=} \frac{f^{(k)}(x)}{x} \overset{(3)}{=} \frac{1}{x} \cdot p_k\left(\frac{1}{x}\right) f(x) = p\left(\frac{1}{x}\right) \cdot f(x)$$

mit $p(y) := y \cdot p_k(y)$ für alle $y \in \mathbb{R}$. Da p wieder eine Polynomfunktion ist, folgt mit (2), dass

$$\frac{f^{(k)}(x) - f^{(k)}(0)}{x - 0} = p\left(\frac{1}{x}\right) \cdot f(x) \to 0$$

für $x \to 0$. Also ist $f^{(k)}$ auch in 0 differenzierbar mit $f^{(k+1)}(0) = 0$.

(ii) *Behauptung:* Die Taylorreihe von f um 0 ist konstant 0. Sie hat den Konvergenzradius unendlich und stimmt in keiner Umgebung von 0 mit f überein.
Beweis: In Aufgabenteil (a) wurde gezeigt, dass $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ und $f^{(n)}(0) = 0$ für jedes $n \in \mathbb{N}_0$. Also ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = 0$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ die Taylorreihe von f um 0. Diese Reihe hat den Konvergenzradius unendlich. Da die Exponentialfunktion nur strikt positive Werte annimmt, gilt

$$f(x) = e^{-1/x^2} > 0$$

für jedes $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. Somit stimmt der Reihenwert der Taylorreihe für kein $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ mit dem Wert der Funktion f in x überein. Insbesondere gilt dies für jede Umgebung von 0.

Aufgabe 5: Sei $n \in \mathbb{N}$ und $f \in C^n(\mathbb{R})$ (d.h. f ist n-mal differenzierbar $\mathbb{R}$ und alle diese Ableitungen sind stetig) sowie $x_0 \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie die Existenz einer Funktion $r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit den Eigenschaften

$$f(x_0 + h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} h^k + r(h)$$

für alle $h \in \mathbb{R}$ und

$$\lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{h^n} = 0.$$

Lösungsvorschlag: *Voraussetzung:* Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $f \in C^n(\mathbb{R})$ sowie $x_0 \in \mathbb{R}$.
Behauptung: Es existiert eine Funktion $r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x_0 + h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} h^k + r(h)$$

für alle $h \in \mathbb{R}$ und

$$\lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{h^n} = 0.$$

Beweis: Sei $h \in \mathbb{R}$. Definiere $I := \big(x_0 - |h|, x_0 + |h|\big)$. Wegen $f \in C^n(\mathbb{R})$ ist $f \in C^n(I)$. Nach dem Satz von Taylor existiert ein $\xi_h \in \big(x_0 - |h|, x_0 + |h|\big) = I$ mit

$$\begin{aligned} f(x_0 + h) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} ((x_0 + h) - x_0)^k + \frac{f^{(n)}(\xi_h)}{n!} ((x_0 + h) - x_0)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} h^k + \frac{f^{(n)}(\xi_h)}{n!} h^n. \end{aligned} \tag{5}$$

Wir definieren $r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$r(h) := f(x_0 + h) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} h^k. \tag{6}$$

Damit ist automatisch die erste Bedingung an die Funktion r erfüllt. Außerdem folgt für $h \neq 0$

— Bitte wenden! —

die Identität

$$\begin{aligned}
\frac{r(h)}{h^n} &\overset{(6)}{=} \frac{1}{h^n}\left(f(x_0+h) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}h^k\right) \\
&\overset{(5)}{=} \frac{1}{h^n}\left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}h^k + \frac{f^{(n)}(\xi_h)}{n!}h^n - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}h^k\right) \\
&= \frac{1}{h^n}\left(\frac{f^{(n)}(\xi_h)}{n!}h^n - \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n\right) \\
&= \frac{1}{n!}\left(f^{(n)}(\xi_h) - f^{(n)}(x_0)\right).
\end{aligned}$$

Wegen $\xi_h \in I$ gilt $|x_0 - \xi_h| \leq |h|$ und somit $\lim\limits_{h\to 0} |\xi_h - x_0| = 0$. Nach der Voraussetzung $f \in C^n(\mathbb{R})$ ist $f^{(n)}$ stetig und es gilt

$$\lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{h^n} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{n!}\left(f^{(n)}(\xi_h) - f^{(n)}(x_0)\right) = \lim_{x\to x_0} \frac{1}{n!}\left(f^{(n)}(x) - f^{(n)}(x_0)\right) = 0.$$