Institut für Analysis
Prof. Dr. Dirk Hundertmark
Dr. Markus Lange

WiSe 2018/2019
03.05.2019

Analysis 2

Aufgabenzettel 2

Abgabe bis 9. Mai 2019, 10:00 Uhr

Information:
Die K-Aufgaben können zur Korrektur abgegeben werden. Die Abgabe erfolgt zu zweit. Die schriftlichen Lösungen der K-Aufgaben sind zur Abgabe in die, zum jeweilig Tutorium gehörenden, Abgabekästen im Foyer des Mathematikgebäudes (Geb. 20.30) zu werfen. Der späteste Abgabetermin ist oben angegeben. Jede K-Aufgabe wird mit 4 Punkten bewertet. Einen Übungsschein erhält wer 50% der Punkte aller K-Aufgaben erzielt.

Aufgabe 6: (K)

(i) Sei $y = \frac{1+x}{1-x}$ mit $x \in (-1,1)$. Zeigen Sie, dass

$$\ln(y) = 2\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} x^{2k+1} .$$

(ii) Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig aber fest. Entwickeln Sie $\ln(2)$ mit Hilfe der obigen Gleichung in einer Potenzreihe und schätzen Sie das Restglied R_n ab.

Aufgabe 7: Machen Sie sich klar warum die Reihendarstellung aus Aufgabe 6 für numerische Berechnungen des Logarithmus sehr viel besser ist als die in der Vorlesung eingeführte Darstellung. Führen Sie dafür die folgenden Schritte durch:

(i) Schätzen Sie das Restglied R_4 der Darstellung aus Aufgabe 6 für $y = 2$ ab.

(ii) Wie weit müsste man die normale Reihenentwicklung des Logarithmus an der Stelle 2

$$\ln(2) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$$

entwickeln um einen kleineren Fehler zu erhalten als in Aufgabenteil (i)?

— **Bitte wenden!** —

Definition (Hyperbelfunktionen)
Die Funktionen $\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $\cosh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *Sinus Hyperbolicus* und *Cosinus Hyperbolicus*, sind durch ihre in ganz $\mathbb{R}$ konvergenten Potenzreihenentwicklungen definiert:

$$\sinh(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \qquad \text{und} \qquad \cosh(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} \,.$$

Aus den Potenzreihenentwicklungen ergibt sich sofort der Zusammenhang mit der Exponentialfunktion $e^x = \cosh(x) + \sinh(x)$. Dies ist die (eindeutig bestimmte) Zerlegung der Exponentialfunktion in ihren geraden und ungeraden Anteil.

$$\cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})\,, \qquad \sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})\,, \quad (x \in \mathbb{R})\,.$$

Diese Formeln werden auch häufig zur Definition der Hyperbelfunktionen benutzt.

Analog wie bei den Kreisfunktionen definiert man *Tangens Hyperbolicus* und *Cotangens Hyperbolicus*:

$$\tanh(x) := \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} \qquad \text{und} \qquad \coth(x) := \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)} \quad (x \neq 0)\,.$$

Definition (Areafunktionen)
Die Umkehrfunktionen der Hyperbelfunktionen heißen *Areafunktionen*.

$\operatorname{arcosh} : [1,\infty) \to [0,\infty)$ ist die Umkehrfunktion von $\cosh : [0,\infty) \to [1,\infty)$,
$\operatorname{arsinh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist die Umkehrfunktion von $\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
$\operatorname{artanh} : (-1,1) \to \mathbb{R}$ ist die Umkehrfunktion von $\tanh : \mathbb{R} \to (-1,1)$ und
$\operatorname{arcoth} : (-\infty,-1)\cup(1,\infty) \to \mathbb{R}\backslash\{0\}$ ist Umkehrfunktion von $\coth : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to (-\infty,-1)\cup(1,\infty)$.

Aufgabe 8: Zeigen Sie die folgenden Identitäten

(i) $\operatorname{arcosh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$ für $x \geq 1$,

(ii) $\operatorname{arsinh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$,

(iii) $\operatorname{artanh}(x) = \frac{1}{2}\ln\Big(\frac{1+x}{1-x}\Big)$, für $|x| < 1$,

(iv) $\operatorname{arcoth}(x) = \frac{1}{2}\ln\Big(\frac{x-1}{x+1}\Big)$, für $|x| > 1$.

Aufgabe 9: (K)

(i) Man zeige für alle $x, y \in \mathbb{R}$ für die $\tan(x)$, $\tan(y)$ und $\tan(x+y)$ definiert sind das Additionstheorem des Tangens

$$\tan(x+y) = \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x)\tan(y)}\,.$$

(ii) Man zeige, dass

$$4\arctan(\frac{1}{5}) - \arctan(\frac{1}{239}) = \frac{\pi}{4}\,.$$

Die folgenden Aufgaben mit **(Tutorium KW 19)** werden im Tutorium in der KW 19 bearbeitet und müssen nicht zuhause bearbeitet werden.

Aufgabe 10: (Tutorium KW 19)
Berechnen Sie die exakten Werte von sin, cos und tan an den Stellen $x = \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{6}$.

Aufgabe 11: (Tutorium KW 19)
Sei das reguläre n-Eck E_n definiert durch die n-te Einheitswurzel ξ_k, $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Bestimmen Sie den Umfang L_n von E_n für alle $n \in \mathbb{N}$. Bestimmen Sie damit dann den Umfang des Einheitskreises durch Grenzübergang $n \to \infty$.

Aufgabe 12: (Tutorium KW 19)

(i) Zeigen Sie die Ungleichung

$$\arcsin(x) \leq \tfrac{\pi}{2} + 2x\sqrt{1-x^2} \quad \text{für } x \in [-1, 1].$$

Untersuchen Sie dazu die Extremalstellen der Funktion $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = \arcsin(x) - 2x\sqrt{1-x^2}$.
Funktionswerte $\sin(w)$ *für spezielle* $w \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ *können nachgeschlagen werden.*

(ii) Bestimmen Sie die Extremalstellen und Extremwerte der Funktion $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \ln(x+1) - \frac{x^2}{2(x+1)}\,.$$

Besitzt die Funktion globale Minima oder Maxima? Bestimmen Sie gegebenfalls diese Werte.
Hinweis: Es gilt $\ln(x+1) \leq \frac{1}{2}x$ *für* $x \geq 6$.