Institut für Analysis
Prof. Dr. Dirk Hundertmark
Dr. Markus Lange

SoSe 2019
03.05.2019

Analysis 2

Aufgabenzettel 2

Abgabe bis 9. Mai 2019, 10:00 Uhr

Information:
Die K-Aufgaben können zur Korrektur abgegeben werden. Die Abgabe erfolgt zu zweit. Die schriftlichen Lösungen der K-Aufgaben sind zur Abgabe in die, zum jeweilig Tutorium gehörenden, Abgabekästen im Foyer des Mathematikgebäudes (Geb. 20.30) zu werfen. Der späteste Abgabetermin ist oben angegeben. Jede K-Aufgabe wird mit 4 Punkten bewertet. Einen Übungsschein erhält wer 50% der Punkte aller K-Aufgaben erzielt.

Aufgabe 6: (K)

(i) Sei $y = \frac{1+x}{1-x}$ mit $x \in (-1,1)$. Zeigen Sie, dass

$$\ln(y) = 2\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} x^{2k+1}.$$

(ii) Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig aber fest. Entwickeln Sie $\ln(2)$ mit Hilfe der obigen Gleichung in einer Potenzreihe und schätzen Sie das Restglied R_n ab.

Lösungsvorschlag:

(i) Sei $y = \frac{1+x}{1-x}$ mit $x \in (-1,1)$. Aus der Vorlesung ist bekannt, dass

$$\ln(1+x) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{j} x^j$$

Also gilt auch

$$\ln(1-x) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{j} (-x)^j = -\sum_{j=1}^{\infty} \frac{x^j}{j}$$

Somit folgt aus den Rechenregel für den Logarithmus

$$\begin{aligned}\ln(y) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) &= \ln(1+x) - \ln(1-x) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{j} x^j + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{x^j}{j} \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j-1}+1}{j} x^j \\ &= \sum_{\substack{j=1, \\ j \text{ ungerade}}}^{\infty} \frac{2}{j} x^j = 2\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} x^{2k+1}.\end{aligned}$$

— Bitte wenden! —

(ii) Sei nun $y = 2$, dann folgt $x = \frac{1}{3}$ und somit gilt mit Aufgabenteil (i)

$$\ln(2) = 2\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1}\frac{1}{3^{2k+1}}$$

Sei nun $n \in \mathbb{N}$ beliebig aber fest gewählt. Dann gilt

$$\ln(2) = 2\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2k+1}\frac{1}{3^{2k+1}} + R_n$$

mit

$$\begin{aligned} R_n := 2\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2k+1}\frac{1}{3^{2k+1}} &\leq \frac{2}{2(n+1)+1}\sum_{k=n+1}^{\infty} \Big(\frac{1}{3}\Big)^{2k+1} \\ &= \frac{2}{2n+3}\frac{1}{3}\sum_{k=n+1}^{\infty} \Big(\frac{1}{9}\Big)^{k} \\ &= \frac{2}{2n+3}\frac{1}{3}\Big(\frac{1}{9}\Big)^{n+1}\sum_{k=0}^{\infty} \Big(\frac{1}{9}\Big)^{k} \\ &= \frac{2}{3(2n+3)}\Big(\frac{1}{9}\Big)^{n+1}\frac{1}{1-\frac{1}{9}} \\ &= \frac{2}{3(2n+3)}\Big(\frac{1}{9}\Big)^{n+1}\frac{9}{8}. \end{aligned}$$

Also $R_n \leq \frac{2}{3(2n+3)}\big(\frac{1}{9}\big)^{n+1}\frac{9}{8}$.

Aufgabe 7: Machen Sie sich klar warum die Reihendarstellung aus Aufgabe 6 für numerische Berechnungen des Logarithmus sehr viel besser ist als die in der Vorlesung eingeführte Darstellung. Führen Sie dafür die folgenden Schritte durch:

(i) Schätzen Sie das Restglied R_4 der Darstellung aus Aufgabe 6 für $y = 2$ ab.

(ii) Wie weit müsste man die normale Reihenentwicklung des Logarithmus an der Stelle 2

$$\ln(2) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$$

entwickeln um einen kleineren Fehler zu erhalten als in Aufgabenteil (i)?

Lösungsvorschlag:

(i) Für $n = 4$ gilt mit der Abschätzung aus Aufgabe 6 (ii)

$$R_4 \leq \frac{2}{3(8+3)}\frac{1}{9^5}\frac{9}{8} < \frac{1}{14}\frac{1}{9^5} < \frac{1}{9^6}.$$

(ii) Aus der gegebenen konvergenten Reihenentwicklung des Logaritmus an der Stelle 2 folgt

$$\ln(2) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \mp \cdots$$

Um einen Fehler in der selben Größenordnung wie in Aufgabenteil (i) zu erhalten müsste $n \approx 9^6 = 531411$ gewählt werden. Denn aber der Stelle würden wir zu dem bereits aufsummierten Ausdruck nur noch Terme hinzuaddieren und abziehen die kleiner sind als $\frac{1}{9^6} = \frac{1}{531411}$.

Definition (Hyperbelfunktionen)
Die Funktionen $\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $\cosh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *Sinus Hyperbolicus* und *Cosinus Hyperbolicus*, sind durch ihre in ganz $\mathbb{R}$ konvergenten Potenzreihenentwicklungen definiert:

$$\sinh(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \qquad \text{und} \qquad \cosh(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}\,.$$

Aus den Potenzreihenentwicklungen ergibt sich sofort der Zusammenhang mit der Exponentialfunktion $e^x = \cosh(x) + \sinh(x)$. Dies ist die (eindeutig bestimmte) Zerlegung der Exponentialfunktion in ihren geraden und ungeraden Anteil.

$$\cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})\,, \qquad \sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})\,, \quad (x \in \mathbb{R})\,.$$

Diese Formeln werden auch häufig zur Definition der Hyperbelfunktionen benutzt.

Analog wie bei den Kreisfunktionen definiert man *Tangens Hyperbolicus* und *Cotangens Hyperbolicus*:

$$\tanh(x) := \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} \qquad \text{und} \qquad \coth(x) := \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)} \quad (x \neq 0)\,.$$

Definition (Areafunktionen)
Die Umkehrfunktionen der Hyperbelfunktionen heißen *Areafunktionen.*

$\operatorname{arcosh} : [1,\infty) \to [0,\infty)$ ist die Umkehrfunktion von $\cosh : [0,\infty) \to [1,\infty)$,
$\operatorname{arsinh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist die Umkehrfunktion von $\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
$\operatorname{artanh} : (-1,1) \to \mathbb{R}$ ist die Umkehrfunktion von $\tanh : \mathbb{R} \to (-1,1)$ und
$\operatorname{arcoth} : (-\infty,-1)\cup(1,\infty) \to \mathbb{R}\backslash\{0\}$ ist Umkehrfunktion von $\coth : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to (-\infty,-1)\cup(1,\infty)$.

Aufgabe 8: Zeigen Sie die folgenden Identitäten

(i) $\operatorname{arcosh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$ für $x \geq 1$,

(ii) $\operatorname{arsinh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$,

(iii) $\operatorname{artanh}(x) = \dfrac{1}{2}\ln\Big(\dfrac{1+x}{1-x}\Big)$, für $|x| < 1$,

(iv) $\operatorname{arcoth}(x) = \dfrac{1}{2}\ln\Big(\dfrac{x-1}{x+1}\Big)$, für $|x| > 1$.

Lösungsvorschlag:

(i) Sei $x \geq 1$, dann erhält man aus $x = \cosh(y) = \frac{1}{2}(e^y + e^{-y})$ durch Multiplikation mit $2e^y$:

$$e^{2y} - 2xe^y + 1 = 0\,.$$

Die Auflösung dieser in e^y quadratischen Gleichung liefert:

$$e^y = x \pm \sqrt{x^2-1}\,. \tag{1}$$

Da die Umkehrung von $x = \cosh(y)$ gemäss obiger Definition im Intervall $0 \leq y < +\infty$ (Hauptwert) erfolgt, kommt in (1) wegen $e^y \geq 1$ und $x \geq 1$ nur das positive Vorzeichen in Frage. Es ist also

$$y = \operatorname{arcosh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2-1})\,.$$

(ii) Die Herleitung von $\operatorname{arsinh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$ verläuft analog.

— Bitte wenden! —

(iii) Sei $|x| < 1$, dann folgt aus $x = \tanh(y) = \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}}$ durch erweitern mit e^y:

$$x = \frac{e^{2y} - 1}{e^{2y} + 1}.$$

Auflösen nach e^{2y} ergibt

$$e^{2y} = \frac{1+x}{1-x},$$

also

$$2y = \ln(\frac{1+x}{1-x}).$$

(iv) Die Herleitung von $\operatorname{arcoth}(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$ verläuft wiederrum analog.

Aufgabe 9: (K)

(i) Man zeige für alle $x, y \in \mathbb{R}$ für die $\tan(x)$, $\tan(y)$ und $\tan(x+y)$ definiert sind das Additionstheorem des Tangens

$$\tan(x+y) = \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x)\tan(y)}.$$

(ii) Man zeige, dass

$$4\arctan(\frac{1}{5}) - \arctan(\frac{1}{239}) = \frac{\pi}{4}.$$

Lösungsvorschlag:

(i) Das Additiontheorem für den Tangens folgt aus denen für Sinus und Cosinus.

$$\tan(x+y) = \frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)} = \frac{\sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)}{\cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)} = \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x)\tan(y)}$$

wobei man im letzten Schritt geschickt mit $1 = \frac{\cos(x)\cos(y)}{\cos(x)\cos(y)}$ multipliziert.

(ii) Aus dem Additionstheorem des Tangens folgt, dass $\tan(2x) = \frac{2\tan(x)}{1-\tan^2(x)}$.
Sei nun $a := \arctan(\frac{1}{5})$ und $b := \arctan(\frac{1}{239})$, dann gilt

$$\tan(a) = \frac{1}{5} \qquad \text{und} \qquad \tan(b) = \frac{1}{239}$$
$$\tan(2a) = \frac{\frac{2}{5}}{1 - \frac{1}{25}} = \frac{5}{12}$$
$$\tan(4a) = \frac{\frac{5}{6}}{1 - \frac{25}{144}} = \frac{120}{119}$$
$$\tan(4a-b) = \frac{\tan(4a) - \tan(b)}{1 + \tan(4a)\tan(b)} = \frac{120 \cdot 239 - 119}{119 \cdot 239 + 120} = 1.$$

Wegen $4a - b \in (-\pi/2, \pi/2)$ folgt aus obigen Rechnungen

$$4\arctan(\frac{1}{5}) - \arctan(\frac{1}{239}) = 4a - b = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}.$$

Die folgenden Aufgaben mit **(Tutorium KW 19)** werden im Tutorium in der KW 19 bearbeitet und müssen nicht zuhause bearbeitet werden.

Aufgabe 10: (Tutorium KW 19)
Berechnen Sie die exakten Werte von sin, cos und tan an den Stellen $x = \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{6}$.

Lösungsvorschlag: Wir behandeln zunächst den Fall $x = \frac{\pi}{4}$. Da

$$\sin(x) = \cos(\frac{\pi}{2} - x)\,, \tag{2}$$

folgt

$$\sin(\frac{\pi}{4}) = \cos(\frac{\pi}{4})\,.$$

Außerdem gilt

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1 \tag{3}$$

Also $\cos^2(\frac{\pi}{4}) + \sin^2(\frac{\pi}{4}) = 1$, und somit muss gelten $\cos^2(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2}$. Weiter gilt, da der Cosinus im Interval $[0, \frac{\pi}{2})$ positiv ist, dass

$$\cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin(\frac{\pi}{4})$$

und somit $\tan(\frac{\pi}{4}) = 1$.

Sei nun $x = \frac{\pi}{3}$. Wir betrachten $z := e^{i\frac{\pi}{3}}$. Aus der Vorlesung wissen wir, dass diese 3. Einheitswurzel die folgende Gleichung löst

$$0 = z^3 + 1 = (z+1)(z^2 - z + 1)$$

somit folgt, da $z \neq -1$,

$$z^2 - z + 1 = 0\,,$$

also $z + \frac{1}{z} = 1$. Es gilt aber auch

$$z + \frac{1}{z} = e^{i\frac{\pi}{3}} + e^{-i\frac{\pi}{3}} = 2\cos(\frac{\pi}{3})\,.$$

Somit erhält man sofort, dass $\cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$ sein muss. Aus (3) folgt also

$$\sin(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}\,, \qquad \tan(\frac{\pi}{3}) = \sqrt{3}\,.$$

Betrachten wir nun $x = \frac{\pi}{6}$. Aus dem obigem Ergebnis für $x = \frac{\pi}{3}$ folgt mit (2) sofort, dass

$$\sin(\frac{\pi}{6}) = \cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}\,, \quad \text{und} \quad \cos(\frac{\pi}{6}) = \sin(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}\,.$$

Dies ergibt zusammen $\tan(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

— Bitte wenden! —

Um die Funktionen sin, cos und tan an der Stelle $x = \frac{\pi}{5}$ zu berechen setzen wir

$$z := e^{i\frac{\pi}{5}}.$$

aus $z^5 = e^{i\pi} = -1$ folgt

$$0 = z^5 + 1 = (z+1)(z^4 - z^3 + z^2 - z + 1).$$

Wegen $z \neq -1$ ergibt sich

$$z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = 0$$

und

$$z^2 - z + 1 - \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} = 0.$$

Substituieren wir hier

$$u := z + \frac{1}{z} = e^{i\frac{\pi}{5}} + e^{-i\frac{\pi}{5}} = 2\cos(\frac{\pi}{5}) > 0,$$

erhalten wir $u^2 - u - 1 = 0$. Diese quadratische Gleichung hat die Lösungen

$$u = \frac{1}{2} \pm \sqrt{1 + \frac{1}{4}} = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5}).$$

In unserem Fall kommt nur die positive Lösung in Frage, d.h.

$$\cos(\frac{\pi}{5}) = \frac{u}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}.$$

Daraus ergibt sich

$$\sin(\frac{\pi}{5}) = \sqrt{1 - \cos^2(\frac{\pi}{5})} = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}},$$
$$\tan(\frac{\pi}{5}) = \sqrt{5 - 2\sqrt{5}}.$$

Bemerkung: Dass die Winkelfunktionen von $\frac{\pi}{5}$ sich allein mit Hilfe von Quadratwurzeln ausdrücken lassen, hängt damit zusammen, dass sich das regelmässige Zehneck mit Zirkel und Lineal konstruieren lässt. Das allgemeine Problem, welche regelmäßigen n-Ecke mit Zirkel und Lineal konstruiert werden können, ist von C.F. Gauß gelöst worden.

Aufgabe 11: (Tutorium KW 19)
Sei das reguläre n-Eck E_n definiert durch die n-te Einheitswurzel ξ_k, $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Bestimmen Sie den Umfang L_n von E_n für alle $n \in \mathbb{N}$. Bestimmen Sie damit dann den Umfang des Einheitskreises durch Grenzübergang $n \to \infty$.

Lösungsvorschlag: Die n-ten Einheitswurzel bilden die Ecken eines dem Einheitskries einbeschriebenen gleichseitigen n-Ecks Die k-te Seite ist die Strecke von $e^{2\pi i(k-1)/n}$ nach $e^{2\pi ik/n}$ $(k = 1, \ldots, n)$ und hat die Länge

$$s_n = \left|e^{2\pi ik/n} - e^{2\pi i(k-1)/n}\right| = \left|e^{2\pi i(k-1/2)/n}(e^{\pi i/n} - e^{-\pi i/n})\right| = \left|e^{\pi i/n} - e^{-\pi i/n}\right| = 2\sin(\frac{\pi}{n}).$$

Infolgedessen ist der Umfang des regularen n-Ecks gleich

$$L_n = 2n\sin(\frac{\pi}{n}).$$

Lässt man n gegen $+\infty$ streben, so schmiegen sich die regulären n-Ecke immer mehr dem Einheitskreis an. Der Grenzwert der Länge L_n ist als Umfang des Einheitskreises definiert. Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} L_n = \lim_{n\to\infty} 2nsin(\frac{\pi}{n}) = \lim_{n\to\infty} 2\pi \frac{\sin(\frac{\pi}{n})}{\frac{\pi}{n}} = \lim_{n\to\infty} 2\pi \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 2\pi$$

wobei verwendet wurde, dass $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$. Der Umfang des Einheitskreises ist also gleich 2π. Dies ist eine der geometrischen Definitionen der Zahl π.

Aufgabe 12: (Tutorium KW 19)

(i) Zeigen Sie die Ungleichung

$$\arcsin(x) \leq \tfrac{\pi}{2} + 2x\sqrt{1-x^2} \quad \text{für } x \in [-1,1].$$

Untersuchen Sie dazu die Extremalstellen der Funktion $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = \arcsin(x) - 2x\sqrt{1-x^2}$.
Funktionswerte $\sin(w)$ *für spezielle* $w \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ *können nachgeschlagen werden.*

(ii) Bestimmen Sie die Extremalstellen und Extremwerte der Funktion $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \ln(x+1) - \frac{x^2}{2(x+1)}.$$

Besitzt die Funktion globale Minima oder Maxima? Bestimmen Sie gegebenfalls diese Werte.
Hinweis: Es gilt $\ln(x+1) \leq \frac{1}{2}x$ *für* $x \geq 6$.

Lösungsvorschlag: (a) Wir wollen zeigen, dass $f(x) \leq \frac{\pi}{2}$ für alle $x \in [-1,1]$ gilt. Als stetige Funktion nimmt f auf dem kompakten Intervall $[-1,1]$ sein Maximum an. Wenn die Aussage für das Maximum erfüllt ist, so ist sie für alle $x \in [-1,1]$ gültig.

Das Maximum wird in einem der kritischen Punkte angenommen. Weil die Funktion f differenzierbar ist auf $(-1,1)$, sind das die Randpunkte des Definitionsbereichs $x=-1$, $x=1$ und die $x \in (-1,1)$ mit $f'(x) = 0$. Wir vergleichen die Funktionswerte an diesen Stellen. Die Werte

$$f(-1) = \arcsin(-1) - 2(-1)\sqrt{1-(-1)^2} = \arcsin(\sin(-\tfrac{\pi}{2})) = -\tfrac{\pi}{2}$$

und

$$f(1) = \arcsin(1) - 2\sqrt{1-(1)^2} = \arcsin(\sin(\tfrac{\pi}{2})) = \tfrac{\pi}{2}$$

können wir leicht bestimmen.

Für die Ableitung von f benötigen wir zunächst, dass $\cos(w) > 0$ und damit $\cos(w) = \sqrt{\cos^2(w)} = \sqrt{1-\sin^2(w)}$ für $w \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) = \arcsin((-1,1))$. Hieraus folgt die Identität

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sin'(\arcsin(x))} = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin(x))}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

für $x \in (-1,1)$. Für diese x gilt auch $1-x^2 > 0$ und wir erhalten

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - 2\sqrt{1-x^2} - 2x\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{-2(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{2x^2}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= \frac{1-2+2x^2+2x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{4(x^2-\frac{1}{4})}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{4(x-\frac{1}{2})(x+\frac{1}{2})}{\sqrt{1-x^2}}. \end{aligned}$$

— Bitte wenden! —

Somit sind $-\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{2}$ die einzigen Nullstellen von f'. Wir berechnen auch die Werte von f an diesen Stellen. Da $\sin(-\frac{\pi}{6}) = -\frac{1}{2}$ und $\sin(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$, erhalten wir

$$\begin{aligned} f(-\tfrac{1}{2}) &= -\tfrac{\pi}{6} + 2\tfrac{1}{2}\sqrt{1-\tfrac{1}{4}} < -\tfrac{\pi}{6} + 1 < -\tfrac{\pi}{6} + \tfrac{\pi}{3} = \tfrac{\pi}{6} < \tfrac{\pi}{2} \\ f(\tfrac{1}{2}) &= \tfrac{\pi}{6} - 2\tfrac{1}{2}\sqrt{1-\tfrac{1}{4}} < \tfrac{\pi}{6} < \tfrac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Die globale Maximalstelle von f ist also $x = 1$ und die Ungleichung gilt in diesem Punkt. Mit ähnlichen Abschätzungen wie oben, sehen wir auch, dass $x = -1$ die globale Minimalstelle von f ist.

(b) Die Funktion f ist beliebig oft differenzierbar auf $[0, \infty)$ mit

$$f'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{2x \cdot 2(x+1) - x^2 \cdot 2}{4(x+1)^2} = \frac{4(x+1) - 4x(x+1) + 2x^2}{4(x+1)^2} = \frac{4 - 2x^2}{4(x+1)^2}$$

Offenbar gilt also für $x \in (0, \infty)$

$$f'(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 4 = 2x^2 \quad \Longleftrightarrow \quad x = |x| = \sqrt{x^2} = \sqrt{2}.$$

Genauso sehen wir, dass $f'(x) > 0$ für $x \in [0, \sqrt{2})$ und $f'(x) < 0$ für $x \in (\sqrt{2}, \infty)$. Also ist f wachsend auf $[0, \sqrt{2})$ und fallend auf $(\sqrt{2}, \infty)$. Damit ist $x_0 = 0$ eine lokale Minimalstelle von f und $x_1 = \sqrt{2}$ eine lokale Maximalstelle.
Wir werden nun zeigen, dass $f(x)$ gegen $-\infty$ divergiert für $x \to \infty$. Dann sehen wir, dass f in x_1 ein globales Maximum besitzt und kein globales Minimum hat.

Zunächst schreiben wir

$$f(x) = \frac{\ln(x+1)(2x+2) - x^2}{2x+2} \quad \text{für } x \in [0, \infty).$$

Da $\lim_{x\to\infty} 2x + 2 = \infty$ liefert die Regel von L'Hospital

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty} f(x) &= \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x+1)(2x+2) - x^2}{2x+2} \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x+1}2(x+1) + 2\ln(x+1) - 2x}{2} \\ &= \lim_{x\to\infty} (1 + \ln(x+1) - x). \end{aligned}$$

Damit diese Rechnung (nach L'Hospital) korrekt war, müssen wir zeigen, dass der letzte Grenzwert auch existiert. Dazu beachte, dass $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[\ln(x+1) - \frac{1}{2}x] = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{2} \leq 0$ für $x \in [1, \infty)$. Das bedeutet $[1, \infty) \to \mathbb{R};\ x \mapsto \ln(x+1) - \frac{1}{2}x$ ist fallend und für $x = 6$ gilt $\frac{1}{2}6 = 3 \geq \ln(7)$, da $\mathrm{e}^3 > 2^3 = 8 > 7$. Insbesondere folgt

$$1 + \ln(x+1) - x \leq 1 + \tfrac{1}{2}x - x = 1 - \tfrac{1}{2}x \to -\infty \quad \text{für } x \to \infty.$$