Institut für Analysis
Prof. Dr. Dirk Hundertmark
Dr. Markus Lange

SoSe 2019
09.05.2019

Analysis 2

Aufgabenzettel 3

Abgabe bis 15. Mai 2019, 10:00 Uhr

Aufgabe 13: (K) Berechnen Sie den Wert der folgenden Integrale durch integrieren einer geeigneten Treppenfunktionen.

(i) $\displaystyle\int_0^b x^2\,dx\,, \quad b>0.$

(ii) $\displaystyle\int_1^b \ln(x)\,dx\,, \quad b>1.$

Hinweis: In (ii) wähle man die Zerlegung: $1 < q < q^2 < \ldots < q^n = b$ mit $q := \sqrt[n]{b}$ und zeige, dass diese Zerlegung für $n \to \infty$ das gesamte Intervall $[1, b]$ abdeckt.

Aufgabe 14: (K)

(i) Zeigen Sie, dass die charakteristische Funktion $\chi_{\mathbb{Q}}$ der rationalen Zahlen auf keinem Intervall $[a, b]$, $(a < b)$ durch Treppenfunktion in der Supremumsnorm approximierbar ist.

(ii) Zeigen Sie, dass monotone Funktionen auf jedem abgeschlossenen Interval $[a, b]$, $(a < b)$ durch Treppenfunktionen in der Supremumsnorm approximierbar sind.

Aufgabe 15: Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{3n} \ln\left(\frac{k+n}{n}\right)$

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2} k \left(\sqrt[n^2]{5}\right)^{k^2}$

Hinweis: Man bastele sich geeignete Treppenfunktionen und finde die Grenzfunktion gegen die sie konvergieren.

Aufgabe 16: Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und streng monoton wachsend. Zeigen Sie, daß die Umkehrfunktion $f^{-1} : [f(a), f(b)] \to \mathbb{R}$ wohldefiniert und integrierbar ist, und daß gilt:

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(x)\,dx = bf(b) - af(a)\,.$$