Institut für Analysis
Prof. Dr. Dirk Hundertmark
Dr. Markus Lange

SoSe 2019
09.05.2019

Analysis 2

Aufgabenzettel 3

Abgabe bis 15. Mai 2019, 10:00 Uhr

Aufgabe 13: (K) Berechnen Sie den Wert der folgenden Integrale durch integrieren einer geeigneten Treppenfunktionen.

(i) $\int_0^b x^2 \, dx \,, \quad b > 0.$

(ii) $\int_1^b \ln(x) \, dx \,, \quad b > 1.$

Hinweis: In (ii) wähle man die Zerlegung: $1 < q < q^2 < \ldots < q^n = b$ mit $q := \sqrt[n]{b}$ und zeige, dass diese Zerlegung für $n \to \infty$ das gesamte Intervall $[1, b]$ abdeckt.

Lösungsvorschlag:

(i) Sei $b > 0$. Wir wählen die äquidistante Zerlegung

$$0 < \frac{b}{n} < \frac{2b}{n} < \ldots < \frac{kb}{n} < \ldots < \frac{(n-1)b}{n} < b \,,$$

sowie eine Folge $(g_n)_n$ von Treppenfunktionen gegeben durch

$$g_n(x) := \begin{cases} 0 \,, & x = 0 \,, \\ \left(\frac{kb}{n}\right)^2 , & \frac{(k-1)b}{n} < x \leq \frac{kb}{n} \end{cases}$$

Es gilt $g_n(x) \to x^2$ gleichmäßig in $0 \leq x \leq b$ für $n \to \infty$, denn für ein $k \in \{1, \ldots, n\}$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,b]} |g_n(x) - x^2| \leq \lim_{n\to\infty} \left| \left(\frac{kb}{n}\right)^2 - \left(\frac{(k-1)b}{n}\right)^2 \right| \leq 2b \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \to 0$$

Somit gilt

$$\begin{aligned} \int_0^b x^2 \, dx = \int_0^b g_n(x) \, dx &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{kb}{n}\right)^2 \frac{b}{n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{b^3}{n^3} \sum_{k=1}^n k^2 \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{b^3}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{b^3}{3}(1 + \frac{1}{n})(1 + \frac{1}{2n}) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{b^3}{3} \,. \end{aligned}$$

— **Bitte wenden!** —

(ii) Sei $b > 1$, $q = \sqrt[n]{b}$ und $Z = (1, q, q^2, \dots, q^k, \dots, q^n)$.

Wir zeigen zuerst, dass diese Zerlegung für $n \to \infty$ das gesamte Intervall $[1, b]$ abdeckt. Dafür betrachten wir den maximalen Abstand zwischen zwei benachbarten Punkten in der Zerlegung. Wenn dieser gegen Null geht für $n \to \infty$ deckt die Zerlegung das gesamte Intervall ab.

$$\max_{k=1,\dots,n} |q^k - q^{k-1}| = q^n - q^{n-1} = q^{n-1}(q-1) = b^{\frac{n-1}{n}}(b^{\frac{1}{n}} - 1) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

da $b^{\frac{n-1}{n}}$ beschränkt ist für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim_{n\to\infty} b^{\frac{1}{n}} \to 1$ für alle $b \geq 1$.

Nun definieren wir eine Folge $(g_n)_n$ von Treppenfunktionen g_n wie folgt:

$$g_n(x) := \begin{cases} 0\,, & x = 1\,, \\ \ln(q^k)\,, & q^{k-1} < x \leq q^k \end{cases}$$

Dann gilt, dass $g_n(x)$ gleichmäßig gegen $\ln(x)$ konvergiert für $n \to \infty$. Dies sieht man wie folgt: Im Fall $x = 1$ ist nichts zu zeigen, sei also $1 < x \leq b$. Dann gibt es wieder ein $k \in \{1, \dots, n\}$ so dass

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,b]} |g_n(x) - \ln(x)| &= \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,b]} |\ln(q^k) - \ln(x)| \\
&\leq \lim_{n\to\infty} |\ln(q^k) - \ln(q^{k-1})| \\
&= \lim_{n\to\infty} \ln(q) \\
&= \ln(b) \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\,.
\end{aligned}$$

Wir berechnen das Integral

$$\begin{aligned}
\int_1^b \ln(x)\,dx = \int_1^b g_n(x)\,dx &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \ln(q^k)|q^k - q^{k-1}| \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} k \ln(q)\, q^{k-1}(q-1) \\
&= (q-1)\ln(q) \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} kq^{k-1} \qquad (1)
\end{aligned}$$

Da $\sum_{k=1}^n r^k = \sum_{k=0}^n r^k - 1 = \frac{r^{n+1}-1}{r-1} - 1$ folgt, dass

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} kr^{k-1} = \frac{d}{dr}\sum_{k=1}^{n} r^k &= \frac{d}{dr}\Big(\frac{r^{n+1}-1}{r-1} - 1\Big) \\
&= \frac{(r-1)(n+1)r^n - (r^{n+1}-1)}{(r-1)^2} \\
&= \frac{(n+1)r^{n+1} - (n+1)r^n - r^{n+1} + 1}{(r-1)^2} \\
&= \frac{nr^{n+1} - (n+1)r^n + 1}{(r-1)^2} \\
&= \frac{nr^n(r-1) - r^n + 1}{(r-1)^2} \\
&= \frac{nr^n}{r-1} - \frac{r^n - 1}{(r-1)^2}
\end{aligned}$$

Wir verwenden dies um Gleichung (1) weiter umzuformen

$$\begin{aligned}(q-1)\ln(q)\sum_{k=1}^{n} kq^{k-1} &= (q-1)\ln(q)\Big(\frac{nq^n}{q-1} - \frac{q^n-1}{(q-1)^2}\Big)\\ &= nq^n\ln(q) - \frac{q^n-1}{q-1}\ln(q)\,.\end{aligned}$$

Per Definition gilt $q^n = b$, also erhalten wir

$$\int_1^b g_n(x)\,dx = nb\ln(b^{\frac{1}{n}}) - (b-1)\frac{\ln(b^{\frac{1}{n}})}{b^{\frac{1}{n}}-1} = b\ln(b) - (b-1)\frac{\ln(b^{\frac{1}{n}})}{b^{\frac{1}{n}}-1} \xrightarrow[n\to\infty]{} b\ln(b) - (b-1)\,,$$

wobei wir verwendet haben, dass

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(b^{\frac{1}{n}})}{b^{\frac{1}{n}}-1} = \lim_{q\to 1+}\frac{\ln(q)}{q-1} = 1\,.$$

Aufgabe 14: (K)

(i) Zeigen Sie, dass die charakteristische Funktion $\chi_{\mathbb{Q}}$ der rationalen Zahlen auf keinem Intervall $[a,b]$, $(a<b)$ durch Treppenfunktionen in der Supremumsnorm approximierbar ist.

(ii) Zeigen Sie, dass monotone Funktionen auf jedem abgeschlossenen Interval $[a,b]$, $(a<b)$ durch Treppenfunktionen in der Supremumsnorm approximierbar sind.

Lösungsvorschlag:

(i) *1. Möglichkeit*: Per Widerspruchsbeweis unter Verwendung der Definition 4.1 einer Treppenfunktion:

Beweis. Seien $a,b\in\mathbb{R}$ mit $a<b$. Wir führen einen Widerspruchsbeweis.
Nehmen wir also an, dass $\chi_{\mathbb{Q}}$ auf dem Intervall $[a,b]$ durch Treppenfunktionen in der Supremumsnorm approximierbar ist. Sei $x\in(a,b)$ und $\varphi\in T[a,b]$ Treppenfunktion, so dass $\|\chi_{\mathbb{Q}}-\varphi\|_\infty\le\varepsilon$ für $\varepsilon<\frac{1}{2}$.
Wir machen eine doppelte Fallunterscheidung.
1. Fall: $x\in\mathbb{Q}$. Dann gilt $\chi_{\mathbb{Q}}(x)=1$.

a) Sei $\varphi(x)\ge 1-\varepsilon$. Aus der Definition einer Treppenfunktion (Definition 4.1) folgt, dass es ein $\eta>0$ gibt, so dass $\varphi(y)\ge 1-\varepsilon$ für alle $y\in(x-\eta,x+\eta)$. Sei nun $z\in(x-\eta,x+\eta)$ so gewählt, dass $\chi_{\mathbb{Q}}(z)=0$, d.h. $z\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. Das es so ein z immer gibt haben wir in Analysis I gezeigt. Dann gilt

$$|\chi_{\mathbb{Q}}(z)-\varphi(z)|\ge|1-\varepsilon|>\frac{1}{2}>\varepsilon$$

Also gilt $\|\chi_{\mathbb{Q}}-\varphi\|_\infty>\varepsilon$. Was ein Widerspruch zu unserer Annahme ist.

b) Sei nun $\varphi(x)<1-\varepsilon$. Dann gibt es $\eta>0$, so dass $\varphi(y)<1-\varepsilon$ für alle $y\in(x-\eta,x+\eta)$ und es folgt:

$$\|\chi_{\mathbb{Q}}-\varphi\|_\infty\ge\sup_{y\in(x-\eta,x+\eta)}|\chi_{\mathbb{Q}}(y)-\varphi(y)|\ge|\chi_{\mathbb{Q}}(x)-\varphi(x)|>|1-1+\varepsilon|=\varepsilon \quad \lightning$$

— Bitte wenden! —

2.Fall: $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Dann gilt $\chi_{\mathbb{Q}}(x) = 0$.

a) Sei $\varphi(x) \leq \varepsilon$. Dann gibt es wieder ein $\eta > 0$ so dass φ konstant ist auf dem offenen Intervall $(x-\eta, x+\eta)$. Hier wählen wir jetzt ein $z \in (x-\eta, x+\eta)$, so dass $\chi_{\mathbb{Q}}(z) = 1$, d.h. $z \in \mathbb{Q}$. Dann gilt

$$|\chi_{\mathbb{Q}}(z) - \varphi(z)| \geq |1 - \varepsilon| > \frac{1}{2} > \varepsilon$$

Also auch hier $\|\chi_{\mathbb{Q}} - \varphi\|_\infty > \varepsilon$. Widerspruch zur Annahme.

b) Sei nun $\varphi(x) > \varepsilon$, dann folgt wie im Fall 1.b):

$$\|\chi_{\mathbb{Q}} - \varphi\|_\infty \geq \sup_{y \in (x-\eta, x+\eta)} |\chi_{\mathbb{Q}}(y) - \varphi(y)| \geq |\chi_{\mathbb{Q}}(x) - \varphi(x)| > \varepsilon \quad \lightning$$

Da $a, b \in \mathbb{R}$ und die Treppenfunktion φ beliebig gewählt waren, kann die charakteristische Funktion $\chi_{\mathbb{Q}}$ der rationalen Zahlen somit auf keinem Intervall $[a, b]$, $(a < b)$ durch Treppenfunktionen in der Supremumsnorm approximiert werden. □

2. Möglichkeit: Per Widerspruchsbeweis unter Verwendung von Satzes 4.6. und Korollar 4.9 aus der Vorlesung:

Beweis. Aus Analysis I wissen wir, dass das zwischen zwei rationalen Zahlen immer eine irrationale Zahl liegt und das die Menge $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \cap [a, b]$ $(a < b)$ überabzählbar ist. Somit hat die Funktion χ_Q auf jedem Intervall $[a, b]$ mit $a < b$ überabzählbar viele Unstetigkeitsstellen. Nehmen wir nun an, dass wir $\chi_{\mathbb{Q}}$ durch Treppenfunktionen approximieren können. Dann folgt aus Satz 4.6 der Vorlesung, dass $\chi_{\mathbb{Q}}$ eine Regelfunktion ist. Wir haben aber in der Vorlesung gezeigt (Korollar 4.9), dass Regelfunktionen bis auf abzählbar viele Stellen stetig sind. Also muss $\chi_{\mathbb{Q}}$ bis auf abzählbar viele Stellen stetig sein. Dies ist ein Widerspruch. Also war unsere Annahme falsch und $\chi_{\mathbb{Q}}$ kann nicht durch Treppenfunktionen approximiert werden. □

(ii) *Beweis.* Sei $[a, b]$ abgeschlossenes Intervall $(a < b)$. O.B.d.A. nehmen wir an, dass f monoton wachsend ist.
Sei $\xi \in (a, b]$. Die Menge $\{f(x) : x < \xi\}$ besitzt ein Supremum M (siehe Vorlesung Analysis I). Wegen der Monotonie von f konvergiert jede Folge $(f(x_n))_n$ für $x_n \to \xi$ gegen das Supremum M.
Ebenso besitzt die Menge $\{f(x) : x > \eta\}$ für $\eta \in [a, b)$ ein Infimum m. Wegen der Monotonie von f konvergiert jede Folge $(f(x_n))_n$ für $x_n \to \eta$ gegen das Infimum m.
Somit besitzt f in jedem Punkt $x \in (a, b)$ links- und rechtsseitige Grenzwerte. Und in a eine rechtsseitigen sowie in b einen linksseitigen Grenzwert. Somit ist f nach Definition 4.5 eine Regelfunktion und kann somit nach Satz 4.6 durch Treppenfunktionen in der Supremumsnorm approximiert werden. □

Aufgabe 15: Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{3n} \ln\left(\frac{k+n}{n}\right)$

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2} k \left(\sqrt[n^2]{5}\right)^{k^2}$

Hinweis: Man bastele sich geeignete Treppenfunktionen und finde die Grenzfunktion gegen die sie konvergieren.

Lösungsvorschlag:

(i) Wie im Hinweis erwähnt, konstruieren wir geeignete Treppenfunktionen und finden deren Grenzfunktionen. Hierfür beachte, dass $\ln(\frac{k+n}{n}) = \ln(1+\frac{k}{n})$. D.h. mit $x_k^{(n)} := 1+\frac{k}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, $k \in \{1, \ldots, n\}$ gilt

$$\sum_{k=1}^{3n} \ln(\frac{k+n}{n}) = \ln(x_1^{(n)}) + \sum_{k=2}^{3n-1} \ln(x_k^{(n)}) + \ln(4)\,.$$

Außerdem gilt $x_k^{(n)} - x_{k-1}^{(n)} = \frac{1}{n}$. Wir definieren

$$g^{(n)}(x) = \begin{cases} 0\,, & \text{für } x = 1 \\ \ln(x_k^{(n)})\,, & \text{für } x_{k-1}^{(n)} < x \leq x_k^{(n)}\,,\ k = 1, \ldots, 3n\,. \end{cases}$$

Diese Treppenfunktion approximiert den natürlichen Logarithmus auf dem Intervall $[1,4]$ in der Supremumsnorm, denn für ein $k \in \{1, \ldots, 3n\}$ gilt

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[1,4]} |\ln(x) - g^{(n)}(x)| &= \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[x_{k-1}^{(n)}, x_k^{(n)}]} |\ln(x) - g^{(n)}(x)| \\
&= \lim_{n\to\infty} \left|\ln(1+\frac{k-1}{n}) - \ln(1+\frac{k}{n})\right| \\
&= \lim_{n\to\infty} \ln(\frac{n+k-1}{n+k}) \\
&= \ln(\lim_{n\to\infty} 1 - \frac{1}{n+k}) = 0\,,
\end{aligned}$$

wobei wir verwendet haben, dass der natürliche Logarithmus stetig ist auf $[1,4]$ und $\ln(1) = 0$. Somit gilt nach Definition/Satz 4.11 aus der Vorlesung

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \ln(x_k^{(n)}) \left(x_k^{(n)} - x_{k-1}^{(n)}\right) = \lim_{n\to\infty} \int_1^4 g^{(n)}\, dx = \int_1^4 \ln\, dx$$

Wir schreiben nun den gesuchten Grenzwert mit Hilfe der Folge von Treppenfunktionen $(g^{(n)})_n$ um und erhalten

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{3n} \ln\left(\frac{k+n}{n}\right) &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \ln(x_k^{(n)}) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} g^{(n)}(x) \left(x_k^{(n)} - x_{k-1}^{(n)}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_1^4 g^{(n)}\, dx \\
&= \int_1^4 \ln\, dx
\end{aligned}$$

Da ln stetig ist auf $[1,4]$ und somit auch eine Regelfunktion auf $[1,4]$ ist existiert der gesuchte Grenzwert nach Definition/Satz 11 und ist durch den Wert des Integrals gegeben. Dieses können wir nun mit Hilfe partieller Integration bestimmen.

$$\int_1^4 \ln\, dx = \left[x \ln(x)\right]_1^4 - \int_1^4 x\frac{1}{x}\, dx = \left[x \ln(x) - x\right]_1^4 = 4\ln(4) - 3\,.$$

Also gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{3n} \ln\left(\frac{k+n}{n}\right) = 4\ln(4) - 3\,.$$

— Bitte wenden! —

(ii) Wir gehen vor wie in a). Beachte, dass $\frac{1}{n^2}k\big(\sqrt[n^2]{5}\big)^{k^2} = \frac{1}{n}\frac{k}{n}5^{\left(\frac{k}{n}\right)^2}$. Daher gilt mit $x_k^{(n)} = \frac{k}{n}$ einerseits $x_k^{(n)} - x_{k-1}^{(n)} = \frac{1}{n}$ und andererseits

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n^2}k\big(\sqrt[n^2]{5}\big)^{k^2} = \frac{1}{n}\big(x_1^{(n)}\big)5^{\left(x_1^{(n)}\right)^2} + \sum_{k=2}^{n-1}\frac{1}{n}x_k^{(n)}5^{\left(x_k^{(n)}\right)^2} + \frac{1}{n}\underbrace{x_n^{(n)}}_{=1}5^{\left(x_n^{(n)}\right)^2}.$$

Wir definieren also

$$g^{(n)}(x) := \begin{cases} 0\,, & \text{für } x = 0 \\ x_k^{(n)}5^{\left(x_k^{(n)}\right)^2}, & \text{für } x_{k-1}^{(n)}5^{\left(x_{k-1}^{(n)}\right)^2} < x \le x_k^{(n)}5^{\left(x_k^{(n)}\right)^2}\,,\ k = 1,\dots,n \end{cases}$$

Da $5^{t^2} = e^{t^2\ln(5)}$ positiv und stetig ist auf $[0,1]$ gibt es ein $k \in \{1,\dots,n\}$ so dass

$$\begin{aligned}\sup_{x\in[0,1]}\left|x5^{x^2} - g^{(n)}(x)\right| &= \sup_{x\in\left[\frac{k-1}{n}5^{\left(\frac{k-1}{n}\right)^2},\frac{k}{n}5^{\left(\frac{k}{n}\right)^2}\right]}\left|x5^{x^2} - \frac{k}{n}5^{\left(\frac{k}{n}\right)^2}\right| \\ &= \left|\frac{k-1}{n}5^{\left(\frac{k-1}{n}\right)^2} - \frac{k}{n}5^{\left(\frac{k}{n}\right)^2}\right|\end{aligned}$$

Somit gilt

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in[0,1]}\left|x5^{x^2} - g^{(n)}(x)\right| &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{k-1}{n}5^{\left(\frac{k-1}{n}\right)^2} - \frac{k}{n}5^{\left(\frac{k}{n}\right)^2}\right| \\ &\le \lim_{n\to\infty}\left|\frac{k-1}{n}5^{\left(\frac{k-1}{n}\right)^2}\right| + \lim_{n\to\infty}\left|\frac{k}{n}5^{\left(\frac{k}{n}\right)^2}\right| \\ &= 0\end{aligned}$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n^2}k\big(\sqrt[n^2]{5}\big)^{k^2} &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\frac{k}{n}5^{\left(\frac{k}{n}\right)^2} \\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}x_k^{(n)}5^{\left(x_k^{(n)}\right)^2}\left(x_k^{(n)} - x_{k-1}^{(n)}\right) \\ &= \lim_{n\to\infty}\int_0^1 g^{(n)}(x)\,dx \\ &= \int_0^1 x5^{x^2}\,dx\end{aligned}$$

Aus der Stetigkeit von $x5^{x^2}$ auf $[0,1]$ folgt, dass es Regelfunktion auf $[0,2]$ ist und somit existiert nach Definition/Satz 11 der gesuchte Grenzwert. Dieses können wir nun mit Hilfe geschickter Substitution und darauffolgender partieller Integration bestimmen.
Wir substituieren $t = x^2$ und erhalten

$$\int_0^1 x5^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 5^t\,dt = \frac{1}{2}\Big[\frac{1}{\ln(5)}e^{t\ln(5)}\Big]_0^1 = \frac{4}{2\ln(5)} = \frac{2}{\ln(5)}\,.$$

Es gilt also

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n^2}k\big(\sqrt[n^2]{5}\big)^{k^2} = \frac{2}{\ln(5)}\,.$$

Aufgabe 16: Es seien $a,b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und streng monoton wachsend. Zeigen Sie, daß die Umkehrfunktion $f^{-1} : [f(a), f(b)] \to \mathbb{R}$ wohldefiniert und integrierbar ist, und daß gilt:

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(x)\,dx = bf(b) - af(a)\,.$$

Beweis. Aus der strengen Monotonie von f folgt zunächst, daß f injektiv ist, sowie $f([a,b]) \subset [f(a), f(b)]$, und aus der Stetigkeit von f folgt mit dem Zwischenwertsatz auch $[f(a), f(b)] \subset f([a,b])$, also $f([a,b]) = [f(a), f(b)]$. Somit ist nach dem Umkehrsatz auch die Umkehrfunktion $f^{-1} : [f(a), f(b)] \to \mathbb{R}$ stetig und streng monoton wachsend und damit insbesondere durch Treppenfunktionen aus $T[f(a), f(b)]$ in der Supremumsnorm approximierbar. Sei ψ_n eine solche Treppenfunktion. Dann ist der folgende Grenzwert nach Definition/Satz 4.11 definiert

$$\int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_{f(a)}^{f(b)} \psi_n\,dx$$

und die Umkehrfunktion f^{-1} somit integrierbar.

Bleibt noch die letzte Behauptung zu zeigen:
Für beliebige Zerlegung $Z_n = \{a =: x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n := b\}$ von $[a,b]$ sei ϕ_n die Treppenfunktion welche das Supremum von f auf jedem der Intervalle $[x_{j-1}, x_j]$ annimmt. Also

$$\phi_n(x) := \begin{cases} f(x_j)\,, & \text{für } x_{j-1} < x \le x_j \\ f(a)\,, & \text{für } x = x_0 \end{cases}$$

Da $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ per Voraussetzung streng monoton wachsend und stetig ist gilt offensichtlich $\|f - \phi_n\|_\infty = 0$. Ebenso gilt

$$\int f\,dx = \lim_{n\to\infty} \int \phi_n\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \big(x_k - x_{k-1}\big) f(x_k)\,.$$

Für die Zerlegung

$$\tilde{Z}_n = \{y_0, \ldots, y_n\} := \{f(a) = f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_{n-1}), f(x_n) = f(b)\}$$

von $[f(a), f(b)]$ sei nun ψ_n die Treppenfunktion, die auf jedem Intervall $\big[f(x_{j-1}), f(x_j)\big]$ das Infimum von f^{-1} annimmt:

$$\psi_n(x) := \begin{cases} f^{-1}(y_{j-1})\,, & y_{j-1} \le y < y_j \\ f^{-1}(f(b))\,, & y = y_n \end{cases}$$

Dann gilt $\|f^{-1} - \psi_n\|_\infty = 0$ da auch f^{-1} streng monoton und stetig ist. Ebenso gilt wieder

$$\int f^{-1}\,dx = \lim_{n\to\infty} \int \psi_n\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \big(y_k - y_{k-1}\big) f^{-1}(y_{k-1})\,.$$

Man sieht nun, dass

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \big(x_k - x_{k-1}\big) f(x_k) - \sum_{k=1}^{n} \big(y_k - y_{k-1}\big) f^{-1}(y_{k-1}) &= \sum_{k=1}^{n} \big(x_k - x_{k-1}\big) y_k - \sum_{k=1}^{n} \big(y_k - y_{k-1}\big) x_{k-1} \\
&= \sum_{j=1}^{n} y_j x_j - \sum_{j=1}^{n} y_j x_{j-1} + \sum_{j=1}^{n} x_{j-1} y_j - \sum_{j=1}^{n} x_{j-1} y_{j-1} \\
&= x_n y_n - x_0 y_0 \\
&= b f(b) - a f(a).
\end{aligned}$$

— Bitte wenden! —

Da nach Definition/Satz 4.11 aus der Vorlesung die folgenden Grenzwerte existieren erhalten wir

$$\begin{aligned}\int f\,dx + \int f^{-1}\,dx &= \lim_{n\to\infty}\int \phi_n\,dx + \lim_{n\to\infty}\int \psi_n\,dx\\ &= \lim_{n\to\infty}\Big(\int \phi_n\,dx + \int \psi_n\,dx\Big)\\ &= \lim_{n\to\infty} bf(b) - af(a)\\ &= bf(b) - af(a)\,.\end{aligned}$$

□

Beachte, dass man auch mit einer beliebigen Zerlegung von $[f(a), f(b)]$ hätte starten können um die Aussage zu beweisen:

Beweis. Sei $\tilde{Z}_n = \{f(a) =: y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}, y_n := f(b)\}$ eine beliebige Zerlegung von $[f(a), f(b)]$. Wir definieren

$$\tilde{\psi}_n(x) := \begin{cases} f^{-1}(y_j)\,, & y_{j-1} < y \leq y_j \\ f^{-1}(y_0)\,, & y = y_0 \end{cases}$$

Dann gilt wie oben $\|f^{-1} - \tilde{\psi}_n\|_\infty = 0$ und

$$\int f^{-1}\,dx = \lim_{n\to\infty}\int \tilde{\psi}_n\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\big(y_k - y_{k-1}\big)f^{-1}(y_k)$$

Weiter sei

$$\tilde{\phi}_n(x) := \begin{cases} f(x_{j-1})\,, & \text{für } f^{-1}(y_{j-1}) \leq x < f^{-1}(y_j) \\ f(x_n)\,, & \text{für } x = f^{-1}(y_n) \end{cases}$$

wobei man hier die Zerlegung

$$Z_n = \{x_0, \ldots, x_n\} := \{a = f^{-1}(y_0), f^{-1}(y_1), \ldots, f^{-1}(y_{n-1}, f^{-1}(y_n) = b\}$$

von $[f^{-1}(f(a)), f^{-1}(f(b))] = [a, b]$ verwendet wurde. Wir haben somit $\|f - \tilde{\phi}_n\|_\infty = 0$ und

$$\int f\,dx = \lim_{n\to\infty}\int \tilde{\phi}_n\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\big(x_k - x_{k-1}\big)f(x_k)$$

Man sieht wieder wie oben, dass

$$\sum_{k=1}^{n}\big(x_k - x_{k-1}\big)f(x_k) + \sum_{k=1}^{n}\big(y_k - y_{k-1}\big)f^{-1}(y_k) == bf(b) - af(a).$$

Also folgt erneut wegen der Existenz der Grenzerte

$$\begin{aligned}\int f\,dx + \int f^{-1}\,dx &= \lim_{n\to\infty}\int \tilde{\phi}_n\,dx + \lim_{n\to\infty}\int \tilde{\psi}_n\,dx\\ &= \lim_{n\to\infty}\Big(\int \tilde{\phi}_n\,dx + \int \tilde{\psi}_n\,dx\Big)\\ &= bf(b) - af(a)\,.\end{aligned}$$

Somit gilt die Behauptung unabhängig davon ob ich zuerst eine beliebige Zerlegung von $[a, b]$ oder von $[f(a), f(b)]$ wähle. □