Institut für Analysis
Prof. Dr. Dirk Hundertmark
Dr. Markus Lange

SoSe 2019
16.05.2019

Analysis 2

Aufgabenzettel 4

Abgabe bis 22. Mai 2019, 10:00 Uhr

Aufgabe 17: (K)
Berechnen Sie die folgenden Integrale.

$$\text{(i)}\quad \int_0^{\sqrt{\ln 4}} 3xe^{-x^2}\,\mathrm{d}x\,, \qquad \text{(ii)}\quad \int_0^{\pi} \cos(2x)e^{x}\,\mathrm{d}x\,,$$

$$\text{(iii)}\quad \int_0^{1} \frac{x^2}{\sqrt{2x^3+1}}\,\mathrm{d}x\,, \qquad \text{(iv)}\quad \int_2^{3} x^2e^{-x}\,\mathrm{d}x\,.$$

Aufgabe 18: (K)
Untersuchen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale auf Konvergenz bzw. Divergenz
(i) $\int_0^1 \frac{1}{\sin(x)}\,dx$ (ii) $\int_1^\infty \frac{x+\sqrt{x}+7}{x^2+2x+1}\,dx$ (iii) $\int_0^\infty \frac{\log(x)}{1+x^2}\,dx$

Aufgabe 19:

(i) Sei $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ stetig. Zeigen Sie, dass

$$\int_0^{\pi} t f(\sin(t))\,dt = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin(t))\,dt$$

Berechnen Sie damit $\int_0^\pi \frac{t\sin(t)}{1+\cos^2(t)}\,dt$.

(ii) Berechnen Sie $\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{1+t^2}\,dt$ mit der Substitution $t=\tan(x)$.
Hinweis: Zeigen Sie, dass $1+\tan(x) = \frac{\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})}{\cos(x)}$ gilt.

— **Bitte wenden!** —

Aufgabe 20: (K)

(i) Es sei (X, d) ein metrischer Raum.

a) Man zeige, dass die Abbildung

$$\delta\colon X \times X \to \mathbb{R}, \quad \delta(x,y) = \min(d(x,y), 1)$$

eine Metrik auf X ist und dass die Metriken d und δ dieselben offenen Mengen auf X definieren.

b) Man zeige, dass die Abbildung

$$d_0(x,y) := \frac{d(x,y)}{1 + d(x,y)}$$

eine Metrik auf X ist und dass $d_0(x,y) < 1$ für alle $x, y \in X$ gilt.
Hinweis: Zeigen Sie, dass die Abbildung $0 \le t \mapsto \frac{t}{1+t}$ streng monoton wachsend ist.

(ii) Es sei X die Menge der komplexen Zahlenfolgen. Man zeige, dass durch

$$d((a_n),(b_n)) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{|a_i - b_i|}{1 + |a_i - b_i|}\ , \quad (a_n),(b_n) \in X$$

eine Metrik auf X definiert wird.

(iii) Es sei l_∞ die Menge aller beschränkten komplexen Zahlenfolgen. Man zeige, dass durch

$$d((a_n),(b_n)) = \sup_{i \in \mathbb{N}} |a_i - b_i|\ , \quad (a_n),(b_n) \in X$$

eine Metrik auf X definiert wird.

Aufgabe 21:

(i) Untersuchen Sie die folgenden Teilmengen des $\mathbb{R}^2$ auf Beschränktheit, Offenheit und Abgeschlossenheit.

a) $M_1 := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon\ |y| \le \min\left\{1, \frac{1}{x^2}\right\}, 0 < x < 5\right\}$,

b) $M_2 := \left\{(x,y) \in \mathbb{N}^2\colon 1 < x < 5, 2 \le y \le x^2\right\}$,

c) $M_3 := \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} \left\{(n, n+1) \times (\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n})\right\}$,

d) $M_4 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ :\ x > 0,\ |x - y| < \frac{1}{x}\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ :\ x \le 0\}$

(ii) Bestimmen Sie das Innere, den Rand sowie den Abschluss von $M_5 := \mathbb{N} \times \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}^2$.