Institut für Analysis
Prof. Dr. Dirk Hundertmark
Dr. Markus Lange

SoSe 2019
16.05.2019

Analysis 2

Aufgabenzettel 4

Abgabe bis 22. Mai 2019, 10:00 Uhr

Aufgabe 17: (K)
Berechnen Sie die folgenden Integrale.

(i) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\ln 4}} 3xe^{-x^2}\,\mathrm{d}x\,,$ (ii) $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos(2x)e^x\,\mathrm{d}x\,,$

(iii) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{x^2}{\sqrt{2x^3+1}}\,\mathrm{d}x\,,$ (iv) $\displaystyle\int_2^{3} x^2e^{-x}\,\mathrm{d}x\,.$

Lösungsvorschlag:

(i) *Behauptung:* Es gilt
$$\int_0^{\sqrt{\ln 4}} 3xe^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{9}{8}.$$
Beweis: Die Funktion $f(x) := 3xe^{-x^2}$ ist stetig, somit Regelfunktion und durch Treppenfunktionen in der Supremumsnorm approximierbar. Also exitiert das gesucht Integral. Wir substituieren $t = t(x) = x^2$. Mit $t'(x) = 2x$ und der Transformation der Integralgrenzen $t(0) = 0$ und $t(\sqrt{\ln 4}) = \ln 4$ erhalten wir mit Hilfe der Substitutionsregel
$$\begin{aligned}\int_0^{\sqrt{\ln 4}} 3xe^{-x^2}\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\ln 4} \frac{3}{2}e^{-y}\,\mathrm{d}y = \big[-\frac{3}{2}e^{-y}\big]_0^{\ln 4}\\ &= -\frac{3}{8} + \frac{3}{2} = \frac{9}{8}.\end{aligned}$$

(ii) *Behauptung:* Es gilt
$$\int_0^{\pi} \cos(2x)e^x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{5}\big(e^{\pi} - 1\big).$$
Beweis: Die Funktion $f(x) := \cos(2x)e^x$ ist stetig, somit Regelfunktion und durch Treppenfunktionen in der Supremumsnorm approximierbar. Also exitiert das gesucht Integral. Durch zweimaliges Anwenden der partieller Integration erhält man
$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} \cos(2x)e^x\,\mathrm{d}x &= \big[\frac{1}{2}\sin(2x)e^x\big]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{1}{2}\sin(2x)e^x\,\mathrm{d}x\\ &= 0 + \big[\frac{1}{4}\cos(2x)e^x\big]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{1}{4}\cos(2x)e^x\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{4}\big(e^{\pi} - 1\big) - \frac{1}{4}\int_0^{\pi} \cos(2x)\,dx\,.\end{aligned}$$

— **Bitte wenden!** —

Somit ist

$$\frac{5}{4}\int_0^\pi \cos(2x)e^x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\big(e^\pi - 1\big),$$

also

$$\int_0^\pi \cos(2x)e^x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{5}\big(e^\pi - 1\big).$$

(iii) *Behauptung:* Es gilt

$$\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{2x^3+1}} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\big(\sqrt{3} - 1\big).$$

Beweis: Auch hier existiert das gesuchte Integral da die Funktion $f(x) := \sqrt{2x^3+1}$ als stetige Funktionen durch Treppenfunktionen in der Supremumsnorm approximierbar ist. Wir verwenden die Substitution $t = t(x) = 2x^3+1$. Mit dem daraus folgenden $t'(x) = 6x^2$, $t(0) = 1$ und $t(1) = 3$ erhalten wir

$$\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{2x^3+1}} \,\mathrm{d}x = \int_1^3 \frac{1}{6}\frac{1}{\sqrt{y}} \,\mathrm{d}y = \big[\frac{1}{3}\sqrt{y}\big]_1^3 = \frac{1}{3}\big(\sqrt{3} - 1\big).$$

(iv) *Behauptung:* Es gilt

$$\int_2^3 x^2 e^{-x} \,\mathrm{d}x = -17e^{-3} + 10e^{-2}.$$

Beweis: Das Integral exitiert wieder da $f(x) := x^2e^{-x}$ durch Treppenfunktionen in der Supremumsnorm approximierbare Regelfunktion ist. Mit zweimaliger partieller Integration erhält man

$$\begin{aligned}
\int_2^3 x^2 e^{-x} \,\mathrm{d}x &= \big[-x^2e^{-x}\big]_2^3 - \int_2^3 -2xe^{-x} \,\mathrm{d}x \\
&= -9e^{-3} + 4e^{-2} + \int_2^3 2xe^{-x} \,\mathrm{d}x \\
&= -9e^{-3} + 4e^{-2} + \big[-2xe^{-x}\big]_2^3 - \int_2^3 -2e^{-x} \,\mathrm{d}x \\
&= -9e^{-3} + 4e^{-2} - 6e^{-3} + 4e^{-2} + \int_2^3 2e^{-x} \,\mathrm{d}x \\
&= -15e^{-3} + 8e^{-2} + \big[-2e^{-x}\big]_2^3 \\
&= -15e^{-3} + 8e^{-2} - 2e^{-3} + 2e^{-2} \\
&= -17e^{-3} + 10e^{-2}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 18: (K)

Untersuchen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale auf Konvergenz bzw. Divergenz

(i) $\int_0^1 \frac{1}{\sin(x)}\,dx$ (ii) $\int_1^\infty \frac{x+\sqrt{x}+7}{x^2+2x+1}\,dx$ (iii) $\int_0^\infty \frac{\log(x)}{1+x^2}\,dx$

Lösungsvorschlag:

(i) Behauptung: $\int_0^1 \frac{1}{\sin(x)}\,dx$ ist divergent.

Beweis:. Für $x > 0$ gilt $\sin(x) \leq x$ und somit gilt $\frac{1}{x} \leq \frac{1}{\sin(x)}$ für $x \in (0,1)$. Aus Analysis I wissen wir, dass $\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx$ divergent ist, also ist auch $\int_0^1 \frac{1}{\sin(x)}\,dx$ nach dem Minorantenkriterium divergent. □

(ii) <u>*Behauptung:*</u> $\int_1^\infty \frac{x+\sqrt{x}+7}{x^2+2x+1}\, dx$ ist divergent.

<u>*Beweis:*</u>. Es gilt $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x\cdot\frac{x+\sqrt{x}+7}{x^2+2x+1}\right)=1$. Daher existiert ein $x_0>1$ mit $\frac{x+\sqrt{x}+7}{x^2+2x+1}\geq\frac{1}{2x}$ für alle $x\geq x_0$. Da $\int_{x_0}^\infty \frac{1}{2x}\, dx$ divergent ist, divergiert auch $\int_{x_0}^\infty \frac{x+\sqrt{x}+7}{x^2+2x+1}\, dx$ nach dem Minorantenkriterium. Wegen $\frac{x+\sqrt{x}+7}{x^2+2x+1}>0$ für alle $x>1$ folgt schließlich die Divergenz von $\int_1^\infty \frac{x+\sqrt{x}+7}{x^2+2x+1}\, dx$. □

(iii) <u>*Behauptung:*</u> Es gilt $\int_0^\infty \frac{\log(x)}{1+x^2}\, dx=0$.

<u>*Beweis:*</u>. Wegen $\lim\limits_{x\to 0+}\sqrt{x}\log(x)=0$ existiert eine Konstante m_1 mit

$$\sqrt{x}\log(x)\leq m_1\leq m_1(1+x^2)\qquad \text{für alle } x\in(0,1],$$

also $\frac{\log(x)}{1+x^2}\leq\frac{m_1}{\sqrt{x}}$ für alle $x\in(0,1]$. Wegen $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\log(x)}{\sqrt{x}}=0$ existiert eine weitere Konstante m_2 mit

$$\frac{\log(x)}{1+x^2}\leq\frac{m_2\sqrt{x}}{1+x^2}\leq\frac{m_2}{x^{\frac{3}{2}}}\qquad \text{für alle } x\in[1,\infty).$$

Aus der Existenz der Integrale $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx$ und $\int_1^\infty \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\, dx$ folgt mit dem Majorantenkriterium die Existenz des Integrals $\int_0^\infty \frac{\log(x)}{1+x^2}\, dx$.

Sei nun $\alpha>0$. Durch Substitution $x=\frac{1}{t}$ erhalten wir

$$\int_{\frac{1}{\alpha}}^{\alpha}\frac{\log(x)}{1+x^2}\, dx=\int_{\alpha}^{\frac{1}{\alpha}}\frac{-\log(\frac{1}{t})}{(1+\frac{1}{t^2})t^2}\, dt=-\int_{\frac{1}{\alpha}}^{\alpha}\frac{\log(t)}{1+t^2}\, dt.$$

Daher gilt $\int_{\frac{1}{\alpha}}^{\alpha}\frac{\log(x)}{1+x^2}\, dx=0$ für alle $\alpha>0$ und somit

$$\int_0^\infty\frac{\log(x)}{1+x^2}\, dx=\lim_{\alpha\to\infty}\int_{\frac{1}{\alpha}}^{\alpha}\frac{\log(x)}{1+x^2}\, dx=0.$$

□

Aufgabe 19:

(i) Sei $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ stetig. Zeigen Sie, dass

$$\int_0^\pi tf(\sin(t))\, dt=\frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin(t))\, dt$$

Berechnen Sie damit $\int_0^\pi \frac{t\sin(t)}{1+\cos^2(t)}\, dt$.

(ii) Berechnen Sie $\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{1+t^2}\, dt$ mit der Substitution $t=\tan(x)$.
Hinweis: Zeigen Sie, dass $1+\tan(x)=\frac{\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})}{\cos(x)}$ gilt.

Lösungsvorschlag:

(i) Mit der Substitution $t(x)=\pi-x$, $dt=-dx$ erhält man, da $\sin(\pi-x)=\sin(x)$,

$$\int_0^\pi tf(\sin(t))\, dt=\int_\pi^0 -(\pi-x)f(\sin(\pi-x))\, dx=\int_0^\pi(\pi-x)f(\sin(x))\, dt$$

— Bitte wenden! —

Also

$$2\int_0^\pi tf(\sin(t))\,dt = \pi\int_0^\pi f(\sin(t))\,dt\,.$$

Für das zu berechnende Integral folgt

$$\int_0^\pi \frac{t\sin(t)}{1+\cos^2(t)}\,dt = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi \frac{\sin(t)}{1+\cos^2(t)}\,dt$$

Wir subsitutieren $\cos(t) = x$, und erhalten mit $-\sin(t)dt = dx$

$$\frac{\pi}{2}\int_0^\pi \frac{\sin(t)}{1+\cos^2(t)}\,dt = -\frac{\pi}{2}\int_1^{-1}\frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}\arctan(x)|_{-1}^{1} = \frac{\pi}{2}\big[\frac{\pi}{4}-(-\frac{\pi}{4}\big] = \frac{\pi^2}{4}\,.$$

(ii) Wir beginnen mit dem Hinweis.
Behauptung: $1+\tan(x) = \frac{\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})}{\cos(x)}$
Beweis: Aus dem Additionstheorem für den Sinus folgt

$$\sin(x+\frac{\pi}{4}) = \sin(x)\cos(\frac{\pi}{4}) + \cos(x)\sin(\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(\sin(x)+\cos(x)\big)$$

Andererseits gilt

$$1+\tan(x) = 1+\frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{\cos(x)+sin(x)}{\cos(x)}$$

Durch einsetzen folgt die gesuchte Behauptung

$$1+\tan(x) = \frac{\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})}{\cos(x)} \qquad \square$$

Diese Gleichheit werden wir nun im Folgenden einsetzen um das gesuchte Integral zu berechnen. Dafür substituieren wir $t(x) = \tan(x)$, $t'(x) = (1+\tan^2(x))$ und erhalten

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{1+t^2}\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan(x))\,dx\,.$$

Hier können wir nun den Hinweis und die Rechenregeln für den Logarithmus verwenden

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan(x))\,dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\Big(\frac{\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})}{\cos(x)}\Big)\,dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\sqrt{2})\,dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\big(\sin(x+\frac{\pi}{4})\big)\,dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos(x))\,dx \\
&= \frac{\pi}{8}\ln(2) - \int_{\frac{\pi}{4}}^{0} \ln\big(\sin(\frac{\pi}{2}-u)\big)\,du - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos(x))\,dx \\
&= \frac{\pi}{8}\ln(2) + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos(u))\,du - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos(x))\,dx \\
&= \frac{\pi}{8}\ln(2)\,,
\end{aligned}$$

wobei wir außerdem die Subsitution $u(x) = -x+\frac{\pi}{4}$, $u'(x) = -1$ verwendet haben.

Aufgabe 20: (K)

(i) Es sei (X, d) ein metrischer Raum.

a) Man zeige, dass die Abbildung

$$\delta\colon X \times X \to \mathbb{R}, \quad \delta(x, y) = \min(d(x, y), 1)$$

eine Metrik auf X ist und dass die Metriken d und δ dieselben offenen Mengen auf X definieren.

b) Man zeige, dass die Abbildung

$$d_0(x, y) := \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$$

eine Metrik auf X ist und dass $d_0(x, y) < 1$ für alle $x, y \in X$ gilt.
Hinweis: Zeigen Sie, dass die Abbildung $0 \leq t \mapsto \frac{t}{1+t}$ streng monoton wachsend ist.

(ii) Es sei X die Menge der komplexen Zahlenfolgen. Man zeige, dass durch

$$d((a_n), (b_n)) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{|a_i - b_i|}{1 + |a_i - b_i|}, \quad (a_n), (b_n) \in X$$

eine Metrik auf X definiert wird.

(iii) Es sei l_∞ die Menge aller beschränkten komplexen Zahlenfolgen. Man zeige, dass durch

$$d((a_n), (b_n)) = \sup_{i \in \mathbb{N}} |a_i - b_i|, \quad (a_n), (b_n) \in X$$

eine Metrik auf X definiert wird.

Lösungsvorschlag:

(i) Es sei (X, d) ein metrischer Raum.

a) Wir zeigen zunächst, dass die Abbildung $\delta\colon X \times X \to \mathbb{R}, \quad \delta(x, y) = \min(d(x, y), 1)$ eine Metrik ist.

- Die Symmetrieeigenschaft für δ folgt direkt aus der Symmetrieeigenschaft der Metrik d.
- Die Positivität von δ, d.h. $\delta(x, y) \geq 0$, folgt direkt aus der Positivität von d und der Definition der Abbildung δ. Ebenso folgt aus der Definition von δ direkt die folgenden Äquivalenzen

$$\delta(x, y) = 0 \iff \delta(x, y) = d(x, y) = 0 \iff x = y\,.$$

- Bleibt noch die Dreiecksungleich zu zeigen. Sei dafür $x, y, z \in X$, dann gilt

$$\delta(x, y) + \delta(y, z) = \begin{cases} d(x, y) + d(y, z)\,, & \text{falls } d(x, y), d(y, z) < 1 \\ d(x, y) + 1\,, & \text{falls } d(x, y) < 1\,, d(y, z) \geq 1 \\ 1 + d(y, z)\,, & \text{falls } d(x, y) \geq 1\,, d(y, z) < 1 \\ 1 + 1\,, & \text{falls } d(x, y) \geq 1\,, d(y, z) \geq 1 \end{cases} \tag{1}$$

— **Bitte wenden!** —

Unter Beachtung der Dreiecksungleich für d,

$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$$

folgt aus Gl. (1) somit

$$\delta(x,y) + \delta(y,z) \geq \begin{cases} d(x,z) \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{cases}$$

Also

$$\delta(x,y) + \delta(y,z) \geq \min(d(x,z), 1) = \delta(x,z)\,.$$

Somit ist δ eine Metrik.

Behauptung: Die Metriken d und δ definieren dieselben offenen Mengen auf X.
Beweis: Betrachten wir zunächst einmal die offenen Bälle bzgl. beider Metriken

$$\begin{aligned} B_\varepsilon(x) &:= \{y \in X \,:\, d(x,y) < \varepsilon\} \\ \widetilde{B}_\varepsilon(x) &:= \{y \in X \,:\, \delta(x,y) < \varepsilon\} \\ &= \{y \in X \,:\, d(x,y) = \delta(x,y) < \varepsilon\} \cup \{y \in X \,:\, d(x,y) \neq \delta(x,y)\,, \delta(x,y) < \varepsilon\} \\ &= B_\varepsilon(x) \cup \{y \in X \,:\, d(x,y) > 1\,, 1 = \delta(x,y) < \varepsilon\} \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt die Definition der Metrik δ verwendet haben.
Es gilt somit

$$\begin{aligned} B_{\varepsilon(x)} &= \widetilde{B}_\varepsilon(x)\,, \quad &\text{falls } \varepsilon < 1\,, \\ B_{\varepsilon(x)} &\subseteq \widetilde{B}_\varepsilon(x)\,, \quad &\text{falls } \varepsilon \geq 1\,. \end{aligned}$$

Aus der Definition einer offenen Mengen folgt nun die Behauptung:
$\Longrightarrow$: Sei $U \subset X$ eine offene Menge in (X,d), dann gilt

$$\forall x \in U\, \exists \varepsilon < 1 \,:\, B_\varepsilon(x) \subset U \implies \forall x \in U\, \exists \varepsilon < 1 \,:\, \widetilde{B}_\varepsilon(x) \subset U\,.$$

Also ist U offen in (X,δ).
$\Longleftarrow$: Sei $U \subset X$ offen in (X,δ), dann gilt

$$\forall x \in U\, \exists \varepsilon < 1 \,:\, \widetilde{B}_\varepsilon(x) \subset U \implies \forall x \in U\, \exists \varepsilon < 1 \,:\, B_\varepsilon(x) \subset U\,.$$

Somit ist U auch offen in (X,d). □

b) Betrachten wir erst den Hinweis.
Behauptung: Die Abbildung $0 \leq t \mapsto \frac{t}{1+t}$ ist streng monoton wachsend. *Beweis*: Sei $f(t) := \frac{t}{1+t}$. Dann ist f offentsichtlich stetig für alle $t \in \mathbb{R}_+$. Weiter gilt $f'(t) = \frac{1}{(1+t)^2} > 0$ für alle $t \in \mathbb{R}_+$. Somit ist die Abbildung streng monoton wachsend.

Nun zeigen wir das $d_0(x,y) := \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$ eine Metrik auf X ist.

- Die Symmetrieeigenschaft folgt direkt aus der Symmetrie der Metrik $d(x,y)$.

- Da $d(x,y) \geq 0$ für alle $x,y \in X$ gilt auch $d_0(x,y) \geq 0$.
  Weiter folgt aus der Definition von d_0 und da $d(x,y)$ Metrik auf X ist, dass

$$0 = d_0(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} \iff d(x,y) = 0 \iff x = y$$

- Es bleibt die Dreiecksungleichung zu zeigen. Seien $x, y, z \in X$. Da d Metrik auf X ist gilt

$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)\,.$$

Somit gilt da die Abbildung d_0 streng monoton wachsend ist (siehe Hinweis)

$$\begin{aligned}
d_0(x,z) = \frac{d(x,z)}{1+d(x,z)} &\leq \frac{d(x,y)+d(y,z)}{1+\big(d(x,y)+d(y,z)\big)} \\
&= \frac{d(x,y)}{1+\big(d(x,y)+d(y,z)\big)} + \frac{d(y,z)}{1+\big(d(x,y)+d(y,z)\big)} \\
&\leq \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} + \frac{d(y,z)}{1+d(y,z)} \\
&= d_0(x,y) + d_0(y,z)
\end{aligned}$$

wobei die Positivität der Metrik d bei der letzten Ungleichung verwendet wurde.

Somit ist d_0 eine Metrik auf X. □

(ii) Sei X die Menge der komplexen Zahlenfolgen. Beachte, dass die Reihe in der Abbildung d konvergent ist für (a_n), $(b_n) \in X$. Dies folgt aus $0 \leq \frac{|a|}{1+|a|} < 1$ für $a \in \mathbb{C}$ (siehe Hinweis zu Aufgabenteil (i) b)) und aus der Konvergenz der Reihe $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} = 2$.
Nun prüfen wir ob die Abbildung d eine Metrik ist:

- Die Symmetrieeigenschaft folgt direkt aus der Definition der gegebenen Abbildung $d((a_n),(b_n))$ für Zahlenfolgen (a_n), $(b_n) \in X$.

- Ebenso folgt direkt aus der Definition der Abbildung d, dass $d((a_n),(b_n)) \geq 0$ und

$$d((a_n),(b_n)) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (a_n) = (b_n)\,.$$

- Bleibt noch die Dreiecksungleichung zu zeigen. Seien $a, b, c \in \mathbb{R}_+$ so dass $a \leq b + c$, dann gilt

$$\begin{aligned}
\frac{a}{1+a} = 1 - \frac{1}{1+a} \leq 1 - \frac{1}{1+b+c+bc} &= \frac{b+c+bc}{1+b+c+bc} && (2)\\
&\leq \frac{b+c+2bc}{1+b+c+bc} && (3)\\
&= \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c} && (4)
\end{aligned}$$

Beachte nun, dass aus der Dreiecksungleich für den Betrag folgt

$$|a_n - b_n| = |a_n - c_n + c_n - b_n| \leq |a_n - c_n| + |c_n - b_n|\,.$$

für $a_n, b_n, c_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$. Sei also nun $a := |a_n - b_n|$, $b := |a_n - c_n|$ und $c := |c_n - b_n|$. Dann folgt aus der Definition der Abbildung d und der Ungleichung in Gl. (2), dass

$$d((a_n),(b_n)) \leq d((a_n),(c_n)) + d((c_n),(b_n))\,.$$

Somit ist $d((a_n),(b_n))$ eine Metrik auf X. □

— Bitte wenden! —

(iii) Sei l_∞ die Menge aller beschränkten komplexen Zahlenfolgen und sei (a_n), $(b_n) \in l_\infty$. Dann existieren $M_a, M_b \in \mathbb{R}$ so dass für $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$|a_n| \leq M_a\,, \qquad |b_n| \leq M_b$$

Daraus folgt, dass $|a_n \pm b_n| \leq M_a + M_b$ ist. Also ist l_∞ ein Vektorraum und außerdem

$$d((a_n),(b_n)) \in \mathbb{R}\,.$$

Nun prüfen wir die Metrikeigenschaften. Sei $(A_n),(b_n),(c_n) \in l_\infty$ beliebig.

- Die Symmetrieeigenschaft ergibt sich direkt aus der Definition
- Ebenso folgt direkt aus der Definition dass $d((a_n),(b_n)) \geq 0$. Weiter gilt

$$\begin{aligned} 0 = d((a_n),(b_n)) \quad &\Longleftrightarrow \quad \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n - b_n| = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad |a_n - b_n| = 0 \;\text{ für alle }\; n \in \mathbb{N} \\ &\Longleftrightarrow \quad (a_n) = (b_n) \end{aligned}$$

- Bleibt wieder die Dreiecksungleichung zu zeigen. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$|a_n - b_n| \leq |a_n - c_n| + |c_n - b_n| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n - c_n| + \sup_{n\in\mathbb{N}} |c_n - b_n| = d((a_n),(b_n)) + d((c_n),(b_n))$$

  Somit gilt die selbe Ungleichungskette auf für $\sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n - b_n|$. Und somit

$$d((a_n),(b_n)) \leq d((a_n),(c_n)) + d((c_n),(b_n))$$

Somit ist $d((a_n),(b_n))$ eine Metrik auf l_∞. □

Aufgabe 21:

(i) Untersuchen Sie die folgenden Teilmengen des $\mathbb{R}^2$ auf Beschränktheit, Offenheit und Abgeschlossenheit.

a) $M_1 := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon\; |y| \leq \min\left\{1, \frac{1}{x^2}\right\}, 0 < x < 5\right\}$,

b) $M_2 := \left\{(x,y) \in \mathbb{N}^2 \colon 1 < x < 5, 2 \leq y \leq x^2\right\}$,

c) $M_3 := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left\{(n, n+1) \times (\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n})\right\}$,

d) $M_4 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; x > 0,\; |x-y| < \frac{1}{x}\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; x \leq 0\}$

(ii) Bestimmen Sie das Innere, den Rand sowie den Abschluss von $M_5 := \mathbb{N} \times \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}^2$.

Lösungsvorschlag:

(i) a) _Behauptung:_ $M_1 := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon\; |y| \leq \min\left\{1, \frac{1}{x^2}\right\}, 0 < x < 5\right\}$ ist beschränkt.

Beweis:. Für $(x,y) \in M_1$ gilt $|x| \leq 5$ und $|y| \leq 1$. Damit erhalten wir

$$\|(x,y)\|_2 = \sqrt{x^2 + y^2} \leq \sqrt{26} < 6,$$

d.h. es gilt $M_1 \subseteq U_6(0)$. □

Behauptung: M_1 ist nicht offen.

Beweis:. Nach Definition von M_1 gilt $z := (\frac{1}{2}, 1) \in M_1$. Für alle $\varepsilon > 0$ gilt jedoch $(\frac{1}{2}, 1+\varepsilon) \notin M_1$ und somit gilt $U_\delta(z) \cap (\mathbb{R}^2 \setminus M_1) \neq \emptyset$ für alle $\delta > 0$, d.h. M_1 ist nicht offen. □

Behauptung: M_1 ist nicht abgeschlossen.

Beweis:. Wir zeigen, dass das Komplement $M_1^c := \mathbb{R}^2 \setminus M_1$ nicht offen ist. Nach Definition von M_1^c gilt $z := (5,0) \in M_1^c$ (denn es gilt $z \notin M_1$). Für alle $0 < \varepsilon < 5$ gilt jedoch $(5-\varepsilon, 0) \notin M_1^c$ (denn es gilt $(5-\varepsilon, 0) \in M_1$) und somit gilt $U_\delta(z) \cap (\mathbb{R}^2 \setminus M_1^c) = U_\delta(z) \cap M_1 \neq \emptyset$ für alle $\delta > 0$, d.h. M_1^c ist nicht offen. Somit ist M_1 nicht abgeschlossen. □

Hinweis: Man könnte auch mit Folgen argumentieren. Die Folge $((x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ definiert durch $(x_n, y_n) := (5 - \frac{1}{n}, 0)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist eine Folge in M_1. Außerdem gilt $(x_n, 0) \to (5,0)$ für $n \to \infty$. Allerdings gilt $(5,0) \notin M_1$, d.h. M_1 ist nicht abgeschlossen.

b) Behauptung: $M_2 := \left\{(x,y) \in \mathbb{N}^2 \colon 1 < x < 5, 2 \leq y \leq x^2\right\}$ ist beschränkt und abgeschlossen.

Beweis:. Nach der Definition von M_2 gilt $2 \leq y \leq x^2 < 5^2 = 25$, d.h. es gilt $M_2 \subseteq \{2, \ldots, 5\} \times \{1, \ldots, 25\}$. Damit ist M_2 eine endliche Menge und daher insbesondere beschränkt. Als Vereinigung endlich vieler abgeschlossener Mengen ist M_2 außerdem abgeschlossen. □

Behauptung: M_2 ist nicht offen.

Beweis:. Nach Definition gilt $(2,2) \in M_2$. Jedoch ist für kein $\delta > 0$ die Umgebung $U_\delta(2,2)$ in M_2 enthalten, d.h. M_2 ist nicht offen. □

c) Behauptung: $M_3 := \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \left\{(n, n+1) \times (\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n})\right\}$ ist nicht beschränkt.

Beweis:. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt $(x_n, y_n) := (n + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}(\frac{1}{1+n} + \frac{1}{n})) \in M_3$ (Mittelpunkt eines Quaders). Dann gilt $\|(x_n, y_n)\|_2 \geq |x_n| = n + \frac{1}{2} \to \infty$ für $n \to \infty$, d.h. M_3 ist unbeschränkt. □

Behauptung: M_3 ist offen.

Beweis:. Wir zeigen zunächst, dass $\tilde{M}_n := \left\{(n, n+1) \times (\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n})\right\}$ für festes $n \in \mathbb{N}$ offen ist. Sei also zunächst $n \in \mathbb{N}$ fest und $a = (x,y) \in \tilde{M}_n$. Dann existiert ein $\delta > 0$ so, dass

$$n < x - \delta < x + \delta < n+1 \quad \text{und} \quad \frac{1}{n+1} < y - \delta < y + \delta < \frac{1}{n}.$$

Für alle $z \in \mathbb{R}^2$ mit $\|z\| < \delta$ gilt dann $a + z \in \tilde{M}_n$, d.h. $U_\delta(a) \subseteq \tilde{M}_n$. Also ist $\tilde{M}_n$ offen.

Da beliebige Vereinigungen offener Mengen offen sind, ist somit auch $M_3 = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \tilde{M}_n$ offen. □

— Bitte wenden! —

Behauptung: M_3 ist nicht abgeschlossen.

Beweis:. Es gilt $M_3 \neq \emptyset$ (da $(\frac{3}{2}, \frac{3}{4}) \in M_3$) und $M_3 \neq \mathbb{R}^2$ (da $(0,0) \notin M_3$). Damit ist, da M_3 nach Obigem offen ist, M_3 nicht abgeschlossen, denn die einzigen gleichzeitig offenen und abgeschlossenen Mengen in $\mathbb{R}^2$ sind $\mathbb{R}^2$ und $\emptyset$. $\square$

d) *Behauptung:* $M_4 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x > 0, \ |x-y| < \frac{1}{x}\} \ \cup \ \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \leq 0\}$ ist nicht beschränkt.

Beweis:. $(n,n) \in M_4$ für $n \in \mathbb{N}$ und $\|(n,n)\|_2 \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$. $\square$

Behauptung: M_4 ist nicht abgeschlossen.

Beweis:. $(1,0) \notin M_4$, aber $(1, \frac{1}{n}) \in M_4$ für $n \in \mathbb{N}$ und $(1, \frac{1}{n}) \xrightarrow[n\to\infty]{} (1,0)$ $\square$

Behauptung: M_4 ist offen.

Beweis:. Beachte, dass M_4 offen ist wenn M_4^c abgeschlossen ist.
Es sei also $(z^{(n)})_{n\in\mathbb{N}} = ((x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in

$$M_4^c = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x > 0, \ |x-y| \geq \frac{1}{x}\}$$

mit

$$z = (x,y) := (\lim_{n\to\infty} x_n, \lim_{n\to\infty} y_n) = \lim_{n\to\infty} z^{(n)}.$$

Wir schließen zuerst $x = 0$ aus.
Annahme: $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Für eine beliebige Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$|x_n - y_n| \geq \frac{1}{x_n}$$

muss dann $|y_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$ gelten. Damit divergiert $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und durch Kontraposition erhält man $x \neq 0$.
Nun liefern die Grenzwertsätze der Analysis I

$$\forall\, n \in \mathbb{N}: \ |x_n - y_n| \geq \frac{1}{x_n} \implies |x-y| \geq \frac{1}{x}.$$

Also $z \in M_4^c$. Damit ist M_4^c abgeschlossen und M_4 somit offen. $\square$

(ii) *Behauptung:* Es gilt $M_5^\circ = \emptyset$.

Beweis:. Sei $(x,y) \in M_5$. Für alle $\varepsilon, \tilde{\varepsilon} > 0$ existieren $z \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ mit $z \notin \mathbb{N}$ und $r \in (y - \tilde{\varepsilon}, y + \tilde{\varepsilon})$ mit $r \notin \mathbb{Q}$. Es existiert also kein $\delta > 0$ mit $U_\delta(x,y) \subseteq M_5$, also gilt $M_5^\circ = \emptyset$. $\square$

Behauptung: Es gilt $\partial M_5 = \mathbb{N} \times \mathbb{R}$.

Beweis:. Sei $(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$. Für $\delta > 0$ gilt $U_\delta(x,y) \cap M_5 \neq \emptyset$, da in $(y-\delta, y+\delta)$ stets ein $r \in \mathbb{Q}$ enthalten ist. Außerdem gilt $U_\delta(x,y) \cap (\mathbb{R}^2 \setminus M_5) = U_\delta(x,y) \cap \mathbb{N} \times (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \neq \emptyset$, da in $(y-\delta, y+\delta)$ stets ein $z \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ enthalten ist. Damit ist (x,y) ein Randpunkt von M_5, d.h. $(x,y) \in \partial M_5$. Also gilt $\mathbb{N} \times \mathbb{R} \subseteq \partial M_5$.

Dann gilt auch $\mathbb{N}\times\mathbb{R} = \partial M_5$, denn wäre $(\tilde{x},\tilde{y}) \in \partial M_5$ mit $\tilde{x} \notin \mathbb{N}$ und $\tilde{y} \notin \mathbb{R}$, so gäbe es ein $\varepsilon > 0$ so, dass $(\tilde{x}-\varepsilon, \tilde{x}+\varepsilon)$ keine natürliche Zahl enthält. Damit würde $U_\varepsilon(\tilde{x},\tilde{y}) \cap M_5 = \emptyset$ gelten, ein Widerspruch zu $(\tilde{x},\tilde{y}) \in \partial M_5$. $\square$

Behauptung: Es gilt $\overline{M_5} = \mathbb{N} \times \mathbb{R}$.

Beweis:. Nach obigen Rechnungen gilt $M_5^\circ = \emptyset$ und $\partial M_5 = \mathbb{N} \times \mathbb{R}$. Damit erhalten wir $\overline{M_5} = M_5^\circ \cup \partial M_5 = \mathbb{N} \times \mathbb{R}$. $\square$