Institut für Analysis
Prof. Dr. Dirk Hundertmark
Dr. Markus Lange

SoSe 2019
23.05.2019

Analysis 2

Aufgabenzettel 5

Abgabe bis 29. Mai 2019, 10:00 Uhr

Aufgabe 22: (Präsensaufgabe)
Seien $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m, n \geq 2$. Geben Sie ein Beispiel an für

(i) ein $A \subset \mathbb{R}^m$ abgeschlossen und $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ stetig mit $f(A)$ nicht abgeschlossen.

(ii) ein $O \subset \mathbb{R}^m$ offen und $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ stetig mit $f(O)$ nicht offen.

(iii) ein $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ stetig mit $f^{-1}(K)$ nicht kompakt.

Aufgabe 23: Seien $m, n \in \mathbb{N}$ und $D \subset \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie die folgenden Behauptungen.

(i) Sei $U \subset D$. Dann ist U genau dann offen in D, wenn zu jedem $x \in U$ eine offene Umgebung $V \subset \mathbb{R}^n$ existiert mit $D \cap V \subset U$.

(ii) Sei $A \subset D$. Dann ist A genau dann abgeschlossen in D, wenn für jede in D konvergente Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ gilt $\lim\limits_{k\to\infty} x_k \in A$.

(iii) Sei $A \subset D$. Dann ist A genau dann abgeschlossen in D, wenn $D \setminus A$ offen in D ist.

Aufgabe 24: (K)
Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ und $f : D \to \mathbb{R}^m$ eine Abbildung. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) f ist stetig.

(ii) Für jede offene Menge $W \subset \mathbb{R}^m$ ist $f^{-1}(W)$ offen in D.

(iii) Für jede abgeschlossene Menge $C \subset \mathbb{R}^m$ ist $f^{-1}(C)$ abgeschlossen in D.

Hinweis: Die Aufgabe 23 zuerst zu bearbeiten ist sehr hilfreich.

— Bitte wenden! —

Aufgabe 25: (K)

(i) Definiere $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch $f(0,0) := 1$ und

$$f(x,y) := \frac{x^2+y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Beweisen Sie, daß dann die beiden Grenzwerte

$$\lim_{x\to 0}\Big(\lim_{y\to 0} f(x,y)\Big) \qquad \text{und} \qquad \lim_{y\to 0}\Big(\lim_{x\to 0} f(x,y)\Big)$$

existieren und mit $f(0,0)$ übereinstimmen, aber f in $(0,0)$ unstetig ist.

(ii) Definiere

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto \begin{cases} x^2/y & \text{falls } x^2 < y\,, \\ y/x^2 & \text{falls } 0 < y \le x^2\,, \\ 0 & \text{sonst}\,. \end{cases}$$

Zeigen Sie: Die Funktion g ist auf ganz $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ stetig und in $(0,0)$ unstetig. Für alle $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ gilt dennoch $g(ta,tb) \to 0$ für $t \to 0$.

Aufgabe 26:

(1) Untersuchen Sie jeweils, ob $f(x,y)$ für $(x,y) \to (0,0)$ konvergiert, und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

(i) $f(x,y) = \dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$,

(ii) $f(x,y) = \dfrac{xy}{e^{x^2}-1}$.

(2) Welche der folgenden Funktionen sind an der Stelle $(0,0)$ stetig?

(i) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto \begin{cases} (1+|xy|)^{\frac{1}{x^2+y^2}} & \text{falls } (x,y) \neq (0,0), \\ 1 & \text{falls } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

(ii) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2}\sin(x-y) & \text{falls } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{falls } (x,y) = (0,0). \end{cases}$