Karlsruhe Institute of Technology

Institut für Analysis
Prof. Dr. Dirk Hundertmark
Dr. Markus Lange

SoSe 2019
23.05.2019

Analysis 2

Aufgabenzettel 5

Abgabe bis 29. Mai 2019, 10:00 Uhr

Aufgabe 22: (Präsensaufgabe)
Seien $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m, n \geq 2$. Geben Sie ein Beispiel an für

(i) ein $A \subset \mathbb{R}^m$ abgeschlossen und $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ stetig mit $f(A)$ nicht abgeschlossen.

(ii) ein $O \subset \mathbb{R}^m$ offen und $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ stetig mit $f(O)$ nicht offen.

(iii) ein $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ stetig mit $f^{-1}(K)$ nicht kompakt.

Lösungsvorschlag: Entsprechende Beispiele sind gegeben durch:

(i) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch $f(x, y) := (e^x, e^y)$ und $A := \mathbb{R}^2$.

(ii) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch $f(x, y) := (0, 0)$ und $O := B_1((0, 0))$.

(iii) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch $f(x, y) := (0, 0)$ und $K := \{(0, 0)\}$.

Aufgabe 23: Seien $m, n \in \mathbb{N}$ und $D \subset \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie die folgenden Behauptungen.

(i) Sei $U \subset D$. Dann ist U genau dann offen in D, wenn zu jedem $x \in U$ eine offene Umgebung $V \subset \mathbb{R}^n$ existiert mit $D \cap V \subset U$.

(ii) Sei $A \subset D$. Dann ist A genau dann abgeschlossen in D, wenn für jede in D konvergente Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ gilt $\lim\limits_{k\to\infty} x_k \in A$.

(iii) Sei $A \subset D$. Dann ist A genau dann abgeschlossen in D, wenn $D \setminus A$ offen in D ist.

Lösungsvorschlag: Seien $m, n \in \mathbb{N}$ und $D \subset \mathbb{R}^n$.

(i) *Beweis.* $\Rightarrow$: Sei U offen in D, dann finden wir eine offene Menge $V \subset \mathbb{R}^n$ mit $U = V \cap D$. Sei nun $x \in U$, dann ist V insbesondere eine offene Umgebung von x und $D \cap V = U \subset U$.

$\Leftarrow$: Es gebe zu jedem $x \in U$ eine offene Umgebung $V \subset \mathbb{R}^n$ mit $D \cap V \subset U$. Wähle also zu jedem $x \in U$ eine solche offene Umgebung $V_x \subset \mathbb{R}^n$ und setze $V := \bigcup\limits_{x\in U} V_x$, dann ist V offen als Vereinigung von offenen Mengen. Es gilt

$$D \cap V = D \cap \bigcup_{x\in U} V_x = \bigcup_{x\in U} (D \cap V_x) \subset U,$$

da $D \cap V_x \subset U$ für alle $x \in U$. Andererseits gilt $x \in D \cap V_x \subset V$ für alle $x \in U$, also ist auch $U \subset V \cap D$ und damit $U = V \cap D$. □

— **Bitte wenden!** —

(ii) *Beweis.* $\Rightarrow$: Sei A abgeschlossen in D, dann finden wir eine abgeschlossene Menge $B \subset \mathbb{R}^n$ mit $A = B \cap D$. Sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge mit $x_0 := \lim\limits_{k\to\infty} x_k \in D$. Da $x_k \in B$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und B abgeschlossen ist, folgt $x_0 \in B$, also ist $x_0 \in B \cap D = A$.

$\Leftarrow$: Für jede in D konvergente Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ gelte $\lim\limits_{k\to\infty} x_k \in A$. Setze $B := \overline{A} \subset \mathbb{R}^n$, dann ist B abgeschlossen und $A \subset B \cap D$. Sei umgekehrt $x_0 \in B \cap D$, wegen $x_0 \in B = \overline{A}$ findet man dann eine Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ mit $x_k \to x_0$ für $k \to \infty$. Wegen $x_0 \in D$ folgt nach Voraussetzung $x_0 \in A$. Also gilt insgesamt $A = B \cap D$. □

(iii) *Beweis.* $\Rightarrow$: Sei A abgeschlossen in D, dann finden wir eine abgeschlossene Menge $B \subset \mathbb{R}^n$ mit $A = B \cap D$. Setze $V := \mathbb{R}^n \setminus B$, dann ist V offen, und es gilt

$$D \setminus A = D \setminus (B \cap D) = D \setminus B = D \cap (\mathbb{R}^n \setminus B) = D \cap V,$$

also ist $D \setminus A$ offen in D.

$\Leftarrow$: Sei $U := D \setminus A$ offen in D, dann finden wir eine offene Menge $V \subset \mathbb{R}^n$ mit $U = D \cap V$. Setze $B := \mathbb{R}^n \setminus V \subset \mathbb{R}^n$, dann ist B abgeschlossen, und es gilt

$$A = D \setminus U = D \setminus (D \cap V) = D \setminus V = D \cap (\mathbb{R}^n \setminus V) = D \cap B,$$

also ist A abgeschlossen in D. □

Aufgabe 24: (K)

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ und $f : D \to \mathbb{R}^m$ eine Abbildung. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

i) f ist stetig.

ii) Für jede offene Menge $W \subset \mathbb{R}^m$ ist $f^{-1}(W)$ offen in D.

iii) Für jede abgeschlossene Menge $C \subset \mathbb{R}^m$ ist $f^{-1}(C)$ abgeschlossen in D.

Hinweis: Die Aufgabe 23 zuerst zu bearbeiten ist sehr hilfreich.

Lösungsvorschlag:

Beweis. i) $\Rightarrow$ iii): f sei stetig, und sei $C \subset \mathbb{R}^m$ abgeschlossen. Setze $A := f^{-1}(C)$, und sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ eine in D konvergente Folge. Setze $x_0 := \lim\limits_{k\to\infty} x_k \in D$, da f stetig ist, folgt dann $f(x_k) \to f(x_0)$ für $k \to \infty$, und da $f(x_k) \in C$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und C abgeschlossen ist, folgt $f(x_0) \in C$, also $x_0 \in f^{-1}(C) = A$. Nach Aufgabe 23 (ii) ist A abgeschlossen in D, was zu zeigen war.

iii) $\Rightarrow$ ii): Für jede abgeschlossene Menge $C \subset \mathbb{R}^m$ sei $f^{-1}(C)$ abgeschlossen in D. Sei $W \subset \mathbb{R}^m$ offen. Dann ist $C := \mathbb{R}^m \setminus W$ abgeschlossen, also ist

$$A := D \setminus f^{-1}(W) = f^{-1}(\mathbb{R}^m) \setminus f^{-1}(W) = f^{-1}(C)$$

abgeschlossen in D und damit $f^{-1}(W) = D \setminus A$ offen in D nach Aufgabe 23 (iii).

ii) $\Rightarrow$ i): Für jede offene Menge $W \subset \mathbb{R}^m$ sei $f^{-1}(W)$ offen in D. Sei $x \in D$. Wir zeigen mithilfe der ε-δ-Charakterisierung der Stetigkeit, daß f in x stetig ist. Sei also $\varepsilon > 0$, dann ist $W := U_\varepsilon(f(x)) \subset \mathbb{R}^m$ offen, also ist nach Voraussetzung $U := f^{-1}(W)$ offen in D. Nach Aufgabe 23 (i) finden wir eine offene Umgebung V von x mit $V \cap D \subset U$. Da V offen ist, finden wir ein $\delta > 0$ mit $U_\delta(x) \subset V$. Sei nun $y \in D$ mit $\|x - y\| < \delta$, dann ist $y \in U_\delta(x) \cap D \subset V \cap D \subset U = f^{-1}(W)$, also $f(y) \in W = U_\varepsilon(f(x))$ und damit $\|f(x) - f(y)\| < \varepsilon$. □

Aufgabe 25: (K)

(i) Definiere $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch $f(0,0) := 1$ und

$$f(x,y) := \frac{x^2+y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Beweisen Sie, daß dann die beiden Grenzwerte

$$\lim_{x\to 0}\Big(\lim_{y\to 0} f(x,y)\Big) \qquad \text{und} \qquad \lim_{y\to 0}\Big(\lim_{x\to 0} f(x,y)\Big)$$

existieren und mit $f(0,0)$ übereinstimmen, aber f in $(0,0)$ unstetig ist.

(ii) Definiere

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto \begin{cases} x^2/y & \text{falls } x^2 < y\,, \\ y/x^2 & \text{falls } 0 < y \le x^2\,, \\ 0 & \text{sonst}\,. \end{cases}$$

Zeigen Sie: Die Funktion g ist auf ganz $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ stetig und in $(0,0)$ unstetig. Für alle $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ gilt dennoch $g(ta,tb) \to 0$ für $t \to 0$.

Lösungsvorschlag:

(i) *Beweis.* Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ wie in der Aufgabenstellung definiert. Für jedes $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gilt

$$f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{x^2y^2+(x-y)^2} \xrightarrow{y\to 0} \frac{x^2+0}{0+(x-0)^2} = 1\,.$$

Also hat man $h(x) := \lim_{y\to 0} f(x,y) = 1$ für alle $x \neq 0$. Es folgt, dass

$$\lim_{x\to 0}\Big(\lim_{y\to 0} f(x,y)\Big) = \lim_{x\to 0} h(x) = 1 = f(0,0)\,,$$

und wegen $f(x,y) = f(y,x)$ erhält man dann auch

$$\lim_{y\to 0}\Big(\lim_{x\to 0} f(x,y)\Big) = \lim_{y\to 0}\Big(\lim_{x\to 0} f(y,x)\Big) = \lim_{y\to 0} h(y) = 1 = f(0,0)\,.$$

Dies zeigt das die Grenzwerte existieren und mit $f(0,0)$ übereinstimmen. Nichtsdestotrotz ist die Funktion f im Punkt $(0,0)$ unstetig, denn es gilt $(\frac{1}{k},\frac{1}{k}) \to (0,0)$ für $k \to \infty$, aber

$$f(\tfrac{1}{k},\tfrac{1}{k}) = \frac{1/k^2+1/k^2}{1/k^4+0} = 2k^2 \xrightarrow{k\to\infty} \infty\,. \qquad \square$$

(ii) *Beweis.* Sei nun $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert wie in der Aufgabenstellung. Auf der offenen Menge $D_1 := \{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y < 0\,\}$ gilt $g(x,y) = 0$, die Funktion ist dort also stetig. Gleiches gilt für die offene Menge $D_2 := \{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y < x^2\,\}$, wo $g(x,y) = y/x^2$ ist, und für die offene Menge $D_3 := \{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 < y\,\}$, wo per Definition $g(x,y) = x^2/y$ gilt. Es bleibt also nur noch die Stetigkeit in den Punkten $(x,0)$ und (x,x^2) für alle $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ zu zeigen. Sei $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und wir betrachten zunächst den Punkt $(x,0)$. Hierfür sei $(x_k,y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}^2$ mit $(x_k,y_k) \to (x,0)$ für $k \to \infty$. Wegen $x_k^2 \to x^2 > 0$ und $y_k \to 0$ für $k \to \infty$ findet man ein $k_0 \in \mathbb{N}$ mit $y_k < x_k^2$ für alle $k \geq k_0$. Für alle $k \geq k_0$ ergibt sich

$$g(x_k,y_k) = \begin{cases} y_k/x_k^2\,, & \text{falls } y_k > 0\,, \\ 0\,, & \text{falls } y_k \le 0\,, \end{cases}$$

— Bitte wenden! —

und wegen $\frac{y_k}{x_k^2} \to \frac{0}{x^2} = 0$ für $k \to \infty$ folgt $g(x_k, y_k) \to 0 = g(x, 0)$ für $k \to \infty$. Somit ist g stetig in $(x, 0)$.
Kommen wir nun zum Punkt (x, x^2). Sei $(x_k, y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}^2$ mit $(x_k, y_k) \to (x, x^2)$ für $k \to \infty$. Wegen $y_k \to x^2 > 0$ für $k \to \infty$ findet man ein $k_0 \in \mathbb{N}$ so dass $y_k > 0$ für alle $k \geq k_0$. Damit folgt für alle $k \geq k_0$

$$g(x_k, y_k) = \begin{cases} x_k^2/y_k\,, & \text{falls } x_k^2 < y_k\,, \\ y_k/x_k^2\,, & \text{falls } y_k \leq x_k^2\,. \end{cases}$$

Aus $\frac{x_k^2}{y_k} \to \frac{x^2}{x^2} = 1$ und $\frac{y_k}{x_k^2} \to \frac{x^2}{x^2} = 1$ für $k \to \infty$ folgt daher $g(x_k, y_k) \to 1 = g(x, y)$ für $k \to \infty$. Damit ist die Stetigkeit in jedem Punkt $(x, y) \neq (0, 0)$ gezeigt.
Daß g in $(0, 0)$ nicht stetig ist, folgt aus $(\frac{1}{k}, \frac{1}{k^2}) \to (0, 0)$ für $k \to \infty$ und

$$g(\tfrac{1}{k}, \tfrac{1}{k^2}) = \frac{\frac{1}{k^2}}{(\frac{1}{k})^2} = 1 \xrightarrow{k\to\infty} 1 \neq 0 = g(0, 0) \qquad \text{für } k \to \infty\,.$$

Sei nun $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Ist $a = 0$ oder $b = 0$, so gilt offenbar $g(ta, tb) = 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$ und die Behauptung ist trivial. Gelte also $a, b \neq 0$. Dann gilt für alle $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit $|t| < |b|/a^2$ die Beziehung $(ta)^2 < |tb|$, und es folgt $g(ta, tb) = 0$ falls $tb < 0$ sowie

$$|g(ta, tb)| = \left|\frac{(ta)^2}{tb}\right| = \frac{|t|a^2}{|b|}\,,$$

falls $tb > 0$, also $|g(ta, tb)| \leq \frac{|t|a^2}{|b|} \to 0$ für $t \to 0$. Damit ist die Behauptung bewiesen, denn für $t \to 0$ kann der Fall $|t| \geq |b|/a^2$ für beliebig aber festes $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ nicht auftreten. $\square$

Aufgabe 26:

(i) Untersuchen Sie jeweils, ob $f(x, y)$ für $(x, y) \to (0, 0)$ konvergiert, und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

a) $f(x, y) = \dfrac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1}$,

b) $f(x, y) = \dfrac{xy}{e^{x^2} - 1}$.

(ii) Welche der folgenden Funktionen sind an der Stelle $(0, 0)$ stetig?

a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \begin{cases} (1 + |xy|)^{\frac{1}{x^2+y^2}} & \text{falls } (x, y) \neq (0, 0), \\ 1 & \text{falls } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$

b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2} \sin(x - y) & \text{falls } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{falls } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$

Lösungsvorschlag:

(i) a) Sei $f(x, y) := \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$ für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.
Behauptung. $f(x, y) \to 2$ für $(x, y) \to (0, 0)$.

Beweis. Für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ gilt

$$f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1} \cdot \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} + 1}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} + 1} = \frac{(x^2 + y^2)(\sqrt{x^2 + y^2 + 1} + 1)}{(x^2 + y^2 + 1) - 1}\,,$$

und damit ergibt sich unmittelbar

$$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2+1}+1 \xrightarrow{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{0^2+0^2+1}+1 = 2\,. \qquad \square$$

b) Sei $f(x,y) := \frac{xy}{e^{x^2}-1}$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ mit $x \neq 0$.
Behauptung. $f(x,y)$ konvergiert nicht für $(x,y) \to (0,0)$.

Beweis. Für $x \neq 0$ gilt

$$f(x,0) = 0 \xrightarrow{x\to 0} 0, \qquad \text{aber} \qquad f(x,x) = \frac{x^2}{e^{x^2}-1} = \frac{t}{e^t-1} \xrightarrow{t\to 0} 1\,,$$

Somit erhält man verschiedene Werte, je nachdem wie man sich dem Nullpunkt annäher. Folglich konvergiert $f(x,y)$ nicht für $(x,y) \to (0,0)$. $\square$

(ii) a) *Voraussetzung.* Definiere

$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto \begin{cases} (1+|xy|)^{\frac{1}{x^2+y^2}}, & \text{falls } (x,y) \neq (0,0) \\ 1, & \text{falls } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Behauptung. Die Funktion f ist unstetig in $(0,0)$.

Beweis. Für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gilt

$$f(x,x) = (1+x^2)^{\frac{1}{2x^2}} = \exp\left(\frac{1}{2x^2}\log(1+x^2)\right) = \exp\left(\frac{1}{2}\frac{\log(1+x^2)}{x^2}\right)\,.$$

Wegen $\frac{\log(1+t)}{t} \to 1$ für $t \to 0$ und da die Exponentialfunktion stetig ist, folgt

$$f(x,x) = \exp\left(\frac{1}{2}\frac{\log(1+x^2)}{x^2}\right) \xrightarrow[x\to 0]{} \exp\left(\frac{1}{2}\cdot 1\right) = \sqrt{e} \neq 1 = f(0,0)\,.$$

Also ist f nicht stetig in $(0,0)$. $\square$

b) *Voraussetzung.* Definiere

$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2}\sin(x-y), & \text{falls } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{falls } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Behauptung. Die Funktion f ist stetig in $(0,0)$.

Beweis. Für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ gilt $f(x,y) = 0$ falls $x = y$, und im Fall $x \neq y$ gilt zunächst $0 \leq (|x|-|y|)^2 = x^2+y^2-2|xy|$, also $\frac{2|xy|}{x^2+y^2} \leq 1$ und damit

$$|f(x,y)| = \frac{2|xy|}{x^2+y^2}|\sin(x-y)| \leq |\sin(x-y)| \to 0 \quad \text{für } (x,y) \to (0,0),$$

denn es gilt $x - y \to 0$ für $(x,y) \to (0,0)$, und $\sin(\cdot)$ ist stetig in 0 mit $\sin(0) = 0$. Also gilt auch

$$f(x,y) \to 0 = f(0,0) \quad \text{für } (x,y) \to (0,0),$$

und somit ist f stetig in $(0,0)$. $\square$