Institut für Analysis
Prof. Dr. Dirk Hundertmark
Dr. Markus Lange

SoSe 2019
29.05.2019

Analysis 2

Aufgabenzettel 6

Abgabe bis 05. Juni 2019, 10:00 Uhr

Aufgabe 27: (K)
Sei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ stetig und $K:\mathbb{R}\times\big(\mathbb{R}\setminus\{0\}\big)\to\mathbb{R}$ definiert durch

$$K(x,y) := \frac{1}{y}\int_0^x \big(f(t+y)-f(t)\big)\,dt\,.$$

(i) Zeigen Sie, dass die Funktion K stetig ist.

(ii) Kann K stetig auf $\mathbb{R}^2$ fortgesetzt werden?
(Die Ja/Nein Aussage ist mit einem Beweis/Gegenbeispiel zu begründen.)

Aufgabe 28: Seien (X,d_X), (Y,d_Y) metrische Räume und $f:X\to Y$ beschränkt. Für $A\subset X$ heißt $\Omega_f(A) := \sup\{d(f(x),f(y))\,:\,x,y\in A\}$ Schwankung von f auf A.

(i) Zeigen Sie, dass für jedes $x\in X$ der Grenzwert $w_f(x) := \lim_{\varepsilon\to 0}\Omega_f(U_\varepsilon(x))$ existiert. Man nennt $\omega_f(x)$ die Schwankung von f in x.

(ii) Zeigen Sie, dass f genau dann in $\xi\in X$ stetig ist, wenn $\omega_f(\xi)=0$ ist.

(iii) Zeigen Sie, dass die Menge Δ_f der Unstetigkeitsstellen von f eine abzählbare Vereinigung abgeschlossener Mengen ist.

Aufgabe 29:

(i) Es sei $D := U_1((0,0))\setminus\{(0,0)\}$. Untersuchen Sie jeweils für die angegebene Funktion f ob der Grenzwert $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ existiert und bestimmen Sie diesen gegebenenfalls.

a) $f:D\to\mathbb{R}$ definiert durch $f(x,y) := \frac{x^{k-1}y^{k+3}+x^ky^{k+2}}{6x^{2k+2}+4y^{2k+2}}$ für ein $k\in\mathbb{N}$,

b) $f:D\to\mathbb{R}$ definiert durch $f(x,y) := \frac{4xy}{x^2+y^2}\sin(xy^2-x^2y)$,

(ii) Es sei $n\in\mathbb{N}$ und $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}^n$ mit $\sum_{k=1}^\infty \|x^{(k)}\| < \infty$. Außerdem sei $(S^{(m)})_{m\in\mathbb{N}}$, die Folge der Partialsummen, definiert durch $S^{(m)} := \sum_{k=1}^m x^{(k)}$.
Zeigen Sie, dass $\sum_{k=1}^\infty x^{(k)} := \lim_{m\to\infty} S^{(m)}$ existiert und

$$\Big\|\sum_{k=1}^\infty x^{(k)}\Big\| \le \sum_{k=1}^\infty \|x^{(k)}\|.$$

— Bitte wenden! —

Aufgabe 30: (K)
Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2}\,, & \text{für } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ 0\,, & \text{für } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

(i) Berechnen Sie die Richtungsableitung

$$\frac{\partial}{\partial t} f(tx,ty)\Big|_{t=0} = \lim_{t\to 0+} \frac{f(tx,ty)-f(0,0)}{t}$$

(ii) Zeigen Sie, dass es keine lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gibt so dass

$$\frac{\partial}{\partial t} f(tx,ty)\Big|_{t=0} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 31: Definiere

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{y^3 - x^2 y}{x^2+y^2} & \text{falls } (x,y) \neq (0,0)\,, \\ 0 & \text{falls } (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

(i) Zeigen Sie, daß die Funktion f auf ganz $\mathbb{R}^2$ stetig ist.

(ii) Berechnen Sie in jedem Punkt die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x}$ und $\frac{\partial f}{\partial y}$ von f.

(iii) Sind die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x}$ und $\frac{\partial f}{\partial y}$ im Punkt $(0,0)$ stetig?

Aufgabe 32: (Präsensaufgabe)
Geben Sie ein Beispiel an für

(i) eine Menge $D \subset \mathbb{R}^k$, ein $x_0 \in D$ und eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$, die in x_0 partiell differenzierbar, aber nicht stetig ist.

(ii) eine Menge $D \subset \mathbb{R}^k$, ein $x_0 \in D$ und eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$, die in x_0 stetig, aber nicht partiell differenzierbar ist.

(iii) eine offene Menge $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}^k$ und eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$, die auf D partiell differenzierbar, aber nicht stetig partiell differenzierbar ist.