Institut für Analysis
Prof. Dr. Dirk Hundertmark
Dr. Markus Lange

SoSe 2019
29.05.2019

Analysis 2

Aufgabenzettel 6

Abgabe bis 05. Juni 2019, 10:00 Uhr

Aufgabe 27: (K)
Sei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ stetig und $K:\mathbb{R}\times\big(\mathbb{R}\setminus\{0\}\big)\to\mathbb{R}$ definiert durch

$$K(x,y) := \frac{1}{y}\int_0^x \big(f(t+y)-f(t)\big)\,dt\,.$$

(i) Zeigen Sie, dass die Funktion K stetig ist.

(ii) Kann K stetig auf $\mathbb{R}^2$ fortgesetzt werden?
(Die Ja/Nein Aussage ist mit einem Beweis/Gegenbeispiel zu begründen.)

Lösungsvorschlag: Sei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ stetig und $K:\mathbb{R}\times\big(\mathbb{R}\setminus\{0\}\big)\to\mathbb{R}$ definiert durch

$$K(x,y) := \frac{1}{y}\int_0^x \big(f(t+y)-f(t)\big)\,dt\,.$$

(i) *Behauptung*: Die Funktion K ist in jedem Punkt $(\xi,\eta)\in\mathbb{R}^2$ mit $\eta\neq 0$ stetig.
Beweis: Wir werden zeigen, dass

$$H(x,y) := \int_0^x \big(f(t+y)-f(t)\big)\,dt = yK(x,y)$$

stetig in (ξ,η) ist. Sei $I\subset\mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall mit Länge $|I|>0$ und derart, dass für $|x-\xi|<1$, $|y-\eta|<1$ und alle $t\in[-|x|,|x|]\cup[-|\xi|,|\xi|]$ die Zahlen t, $t+y$, $t+\eta\in I$ liegen. f ist auf I gleichmäßig stetig, also existiert ein ρ mit $0<\rho<1$, derart, dass $|f(t)-f(s)|<\frac{\varepsilon}{2|I|}$ für alle $s,t\in I$, $|s-t|<\rho$. Sei M eine Schranke für $|f|$ auf I. Dann gilt für $|y-\eta|<\rho$, $|x-\xi|<\min\{1,\frac{\varepsilon}{4M}\}$:

$$\begin{aligned}
\big|H(x,y)-H(\xi,\eta)\big| &= \left|\int_0^x \big(f(t+y)-f(t)\big)\,dt - \int_0^\xi \big(f(t+\eta)-f(t)\big)\,dt\right| \\
&\le \left|\int_0^x \big(f(t+y)-f(t+\eta)\big)\,dt\right| + \left|\int_x^\xi \big(f(t+\eta)-f(t)\big)\,dt\right| \\
&\le |x|\frac{\varepsilon}{2|I|} + 2M|x-\xi| \\
&< \varepsilon\,.
\end{aligned}$$

Dies zeigt die Behauptung. □

— Bitte wenden! —

(ii) *Behauptung*: K kann durch $K(x,0) := f(x) - f(0)$ stetig auf $\mathbb{R}^2$ fortgesetzt werden.
Beweis: Nach dem Hauptsatz der Analysis existiert eine Stammfunktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ von f. Somit gilt für geeignete $t_1, t_2 \in (0,1)$:

$$\begin{aligned} K(x,y) &= \frac{1}{y} \int_0^x \big(f(t+y) - f(t)\big)\, dt \\ &= \frac{1}{y}\big[F(x+y) - F(y) - F(x) + F(0)\big] \\ &= \frac{1}{y}\big[F(x+y) - F(x)\big] - \frac{1}{y}\big[F(y) - F(0)\big] \\ &= f(x+t_1y) - f(t_2y)\,. \end{aligned}$$

Per Voraussetzung ist f auf $\mathbb{R}$ stetig, also insbesondere auch in $x_0 = 0$ und in $x_0 = \xi$. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann gibt es ein $\delta > 0$ mit $|f(u) - f(0)| < \frac{\varepsilon}{2}$ und $|f(v) - f(\xi)| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $|u|$, $|v - \xi| < \delta$. Damit gilt für $|x - \xi|$,$|y| < \frac{\delta}{2}$:

$$\begin{aligned} \big|K(x,y) - K(\xi,0)\big| &= \Big|\big(f(x+t_1y) - f(t_2y)\big) - \big(f(\xi) - f(0)\big)\Big| \\ &\le \big|f(x+t_1y) - f(\xi)\big| + \big|f(t_2y) - f(0)\big| \\ &\le \varepsilon\,. \end{aligned}$$

Also kann K durch $K(x,0) := f(x) - f(0)$ stetig auf $\mathbb{R}^2$ fortgesetzt werden. □

Aufgabe 28: Seien (X, d_X), (Y, d_Y) metrische Räume und $f : X \to Y$ beschränkt. Für $A \subset X$ heißt $\Omega_f(A) := \sup\{d(f(x), f(y)) \,:\, x, y \in A\}$ Schwankung von f auf A.

(i) Zeigen Sie, dass für jedes $x \in X$ der Grenzwert $w_f(x) := \lim_{\varepsilon\to 0} \Omega_f(U_\varepsilon(x))$ existiert. Man nennt $\omega_f(x)$ die Schwankung von f in x.

(ii) Zeigen Sie, dass f genau dann in $\xi \in X$ stetig ist, wenn $\omega_f(\xi) = 0$ ist.

(iii) Zeigen Sie, dass die Menge Δ_f der Unstetigkeitsstellen von f eine abzählbare Vereinigung abgeschlossener Mengen ist.

Lösungsvorschlag: Seien (X, d_X), (Y, d_Y) metrische Räume und $f : X \to Y$ beschränkt.

(i) Für $\varepsilon > \varepsilon' > 0$ gilt $\Omega_f(U_\varepsilon(x)) \ge \Omega_f(U_{\varepsilon'}(x))$. Der Grenzwert $\omega_f(x)$ existiert somit als einseitiger Grenzwert einer monotonen und beschränkten Funktion die per Definition größer gleich Null ist. □

(ii) Wir beweisen die Implikationen in beide Richtungen jeweils durch Kontraposition.
$\Leftarrow$: Nehmen wir an, dass f in ξ unstetig ist. Dann existiert ein $\varepsilon > 0$ derart, dass es für alle $\delta > 0$ ein x mit $d(x,\xi) < \delta$ und $d(f(x), f(\xi)) \ge \varepsilon$ gibt. Somit gilt $\omega_f(\xi) \ge \varepsilon > 0$.
$\Rightarrow$: Sei nun $\omega(\xi) := \varepsilon > 0$. Dann ist für alle $\delta > 0$ die Schwankung

$$\Omega_f(U_\delta(\xi)) = \sup\{d(f(x), f(y)) \,:\, d(x,\xi) < \delta, d(y,\xi) < \delta\} \ge \varepsilon\,.$$

Somit gibt es zu jedem $\delta > 0$ ein x mit $d(x,\xi) < \delta$ und $d(f(x), f(\xi)) \ge \frac{\varepsilon}{2}$. Damit ist f in ξ unstetig. □

(iii) *Behauptung*: Für $\varepsilon := \frac{1}{n}$ ist die Menge $F_n := \{x \in X \,:\, w_f(x) \ge \varepsilon\}$ abgeschlossen.
Beweis: Sei $\xi \in \overline{F_n}$ ein Häufungspunkt von F_n. Dann liegen in jeder ρ-Umgebung von ξ Punkte x mit Schwankung $\omega_f(x) \ge \varepsilon$. Also gibt es zu jedem $\varepsilon' < \varepsilon = \frac{1}{n}$ und jedem $\rho > 0$ Punkte $x, y \in U_\delta(\xi)$ mit $d(f(x), f(y)) > \varepsilon'$. Also ist $\omega_f(\xi) \ge \varepsilon'$ und da $\varepsilon' < \varepsilon$ beliebig war,

auch $\omega_f(\xi) \geq \varepsilon$. Also $\xi \in F_n$. Da ξ beliebig war gilt dies somit für alle Häufungspunkte und per Definition ist F_n somit abgeschlossen. $\square$

Mit der obigen Behauptung und der Aussage (ii) folgt also, dass die Menge der Unstetigkeitsstellen $\Delta_f = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ eine abzählbare Vereinigung abgeschlossener Mengen ist. $\square$

Aufgabe 29:

(i) Es sei $D := U_1((0,0)) \setminus \{(0,0)\}$. Untersuchen Sie jeweils für die angegebene Funktion f ob der Grenzwert $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ existiert und bestimmen Sie diesen gegebenenfalls.

a) $f : D \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x,y) := \frac{x^{k-1}y^{k+3}+x^k y^{k+2}}{6x^{2k+2}+4y^{2k+2}}$ für ein $k \in \mathbb{N}$,

b) $f : D \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x,y) := \frac{4xy}{x^2+y^2}\sin(xy^2 - x^2y)$,

(ii) Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}^n$ mit $\sum_{k=1}^{\infty} \|x^{(k)}\| < \infty$. Außerdem sei $(S^{(m)})_{m\in\mathbb{N}}$, die Folge der Partialsummen, definiert durch $S^{(m)} := \sum_{k=1}^{m} x^{(k)}$.
Zeigen Sie, dass $\sum_{k=1}^{\infty} x^{(k)} := \lim_{m\to\infty} S^{(m)}$ existiert und

$$\|\sum_{k=1}^{\infty} x^{(k)}\| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|x^{(k)}\|.$$

Lösungsvorschlag:

(i) Sei $D := U_1((0,0)) \setminus \{(0,0)\}$ und $f : D \to \mathbb{R}$.

a) *Behauptung:* Für $f(x,y) := \frac{x^{k-1}y^{k+3}+x^k y^{k+2}}{6x^{2k+2}+4y^{2k+2}}$ mit $k \in \mathbb{N}$ existiert $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ nicht.

Beweis: Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{2\left(\frac{1}{n}\right)^{2k+2}}{6\left(\frac{1}{n}\right)^{2k+2} + 4\left(\frac{1}{n}\right)^{2k+2}} = \frac{1}{5}.$$

Für jedes $x \in \mathbb{R}$ und $y = -x$ gilt für jedes $k \in \mathbb{N}$

$$x^{k-1}y^{k+3} + x^k y^{k+2} = (-1)^{k+3}x^{2k+2} + (-1)^{k+2}x^{2k+2} = 0,$$

denn $k+2$ ist genau dann gerade, wenn $k+3$ ungerade ist. Folglich

$$\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n}, -\frac{1}{n}\right) = 0.$$

$\square$

b) *Behauptung:* Für $f(x,y) := \frac{4xy}{x^2+y^2}\sin(xy^2 - x^2y)$ gilt $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

Beweis: Es gilt für $x, y \in \mathbb{R}$

$$0 \leq (|x| - |y|)^2 = x^2 - 2|xy| + y^2\,.$$

Dies impliziert $4|xy| \leq 2(x^2+y^2)$. Sei nun $(z^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ definiert durch $z^{(k)} := (x_k, y_k)$ mit $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ und $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ reelle Nullfolgen mit $(x_k, y_k) \in D$ für $k \in \mathbb{N}$. Da wir bereits wissen, dass $|\sin(x_k^2 y_k)| \leq |x_k^2 y_k|$ folgt für jedes $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} |f(z^{(k)})| = |f(x_k, y_k)| &= \left|\frac{4x_k y_k}{x_k^2 + y_k^2}\right| \left|\sin(x_k y_k^2 - x_k^2 y_k)\right| \\ &\leq 2|x_k y_k^2 - x_k^2 y_k| \\ &\leq 2(|x_k y_k^2| + |x_k^2 y_k|) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0\,. \end{aligned} \qquad \square$$

(ii) *Voraussetzung:* Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}^n$ mit $\sum_{k=1}^{\infty} \|x^{(k)}\| < \infty$. Außerdem sei $(S^{(m)})_{m\in\mathbb{N}}$ definiert durch $S^{(m)} := \sum_{k=1}^{m} x^{(k)}$.

Behauptung 1: $\sum_{k=1}^{\infty} x^{(k)} := \lim_{m\to\infty} S^{(m)}$ existiert.
Beweis: Wir zeigen, dass $(S^{(m)})_{m\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge ist. Es sei also $\epsilon > 0$. Nach Voraussetzung existiert $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\forall_{m>n\geq n_0} : \sum_{k=n+1}^{m} \|x^{(k)}\| < \epsilon\,.$$

Folglich gilt für alle $m > n \geq n_0$

$$\Big\|\sum_{k=1}^{m} x^{(k)} - \sum_{k=1}^{n} x^{(k)}\Big\| \leq \sum_{k=n+1}^{m} \|x^{(k)}\| < \epsilon\,. \qquad \square$$

Behauptung 2: $\left\|\sum_{k=1}^{\infty} x^{(k)}\right\| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|x^{(k)}\|$.
Beweis: Wir setzen $S := \lim_{m\to\infty} S^{(m)}$. Für $m \in \mathbb{N}$ gilt mit der umgekehrten Dreiecksungleichung

$$0 \leq \big|\|S^{(m)}\| - \|S\|\big| \leq \|S^{(m)} - S\| \xrightarrow[m\to\infty]{} 0\,.$$

Es folgt, dass $\|S^{(m)}\| \xrightarrow[m\to\infty]{} \|S\|$. Nun gilt für $m \in \mathbb{N}$ mit der Dreiecksungleichung

$$\|S^{(m)}\| \leq \sum_{k=1}^{m} \|x^{(k)}\| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|x^{(k)}\|\,.$$

Insgesamt also

$$\|S\| = \lim_{m\to\infty} \|S^{(m)}\| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|x^{(k)}\|\,. \qquad \square$$

Aufgabe 30: (K)

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2}\,, & \text{für} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\[2ex] 0\,, & \text{für} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

(i) Berechnen Sie die Richtungsableitung

$$\frac{\partial}{\partial t} f(tx, ty)\Big|_{t=0} = \lim_{t\to 0+} \frac{f(tx,ty) - f(0,0)}{t}$$

(ii) Zeigen Sie, dass es keine lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gibt so dass

$$\frac{\partial}{\partial t} f(tx, ty)\Big|_{t=0} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Lösungsvorschlag:

(i) Wir berechnen

$$f(tx,ty) = \frac{t^3xy^2}{t^2(x^2+y^2)} = tf(x,y)\,.$$

Somit gilt

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(tx,ty)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{tf(x,y)}{t} = f(x,y)$$

Also existiert die Richtungsableitung.

(ii) In (i) haben wir gezeigt, dass

$$\frac{\partial}{\partial t} f(tx,ty)\Big|_{t=0} = f(x,y)\,.$$

Aus Analysis I wissen wir das solche Grenzwerte eindeutig sind. Wir müssen also nur noch zeigen, dass f nicht linear ist. Sei dafür $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Per Definition der Funktion f gilt

$$f(2,1) = \frac{2}{5}\,, \qquad f(1,1) = \frac{1}{2}\,, \qquad f(1,0) = 0\,.$$

Wir erhalten also

$$\frac{2}{5} = f(2,1) \neq f(1,1) + f(1,0) = \frac{1}{2}$$

Also ist f nicht linear und somit existiert keine lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$\frac{\partial}{\partial t} f(tx,ty)\Big|_{t=0} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\,.$$

Aufgabe 31: Definiere

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{y^3 - x^2y}{x^2+y^2} & \text{falls } (x,y) \neq (0,0)\,, \\ 0 & \text{falls } (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

(i) Zeigen Sie, daß die Funktion f auf ganz $\mathbb{R}^2$ stetig ist.

(ii) Berechnen Sie in jedem Punkt die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x}$ und $\frac{\partial f}{\partial y}$ von f.

(iii) Sind die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x}$ und $\frac{\partial f}{\partial y}$ im Punkt $(0,0)$ stetig?

Lösungsvorschlag:

(i) *Behauptung*: Die Funktion f ist auf ganz $\mathbb{R}^2$ stetig.
Beweis: Zunächst ist $f|_{\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}}$ als Komposition stetiger Funktionen stetig, und da $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ offen ist, ist auch f auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ stetig. Es bleibt also nur noch die Stetigkeit in $(0,0)$ zu zeigen. Sei dazu $(x_k, y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, dann gilt

$$m_k := \max\{|x_k|\,, |y_k|\} \xrightarrow{k\to\infty} 0\,,$$

— Bitte wenden! —

und es folgt:

$$|f(x_k, y_k)| \leq \frac{|y_k^3| + |x_k^2 y_k|}{x_k^2 + y_k^2} \leq \frac{m_k^3 + m_k^3}{m_k^2} = 2m_k \xrightarrow{k\to\infty} 0\,.$$

Dies bedeutet $f(x_k, y_k) \to 0 = f(0,0)$ für $k \to \infty$. Also ist f auch in $(0,0)$ stetig. $\square$

(ii) Sei $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Dann ist f als Quotient von partiell differenzierbaren Funktionen im Punkt (x,y) nach der Quotientenregel partiell differenzierbar, und es gilt:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{-2xy(x^2+y^2) - (y^3 - x^2 y)2x}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{4xy^3}{(x^2+y^2)^2}.$$

(Denn: beim Ableiten nach x wird y als Konstante betrachtet). Analog ergibt sich

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{(3y^2 - x^2)(x^2+y^2) - (y^3 - x^2 y)2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{4x^2y^2 - x^4 + y^4}{(x^2+y^2)^2}.$$

Im Punkt $(0,0)$ rechnen wir hingegen direkt die Definition der partiellen Ableitung nach: Es gilt

$$\frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = \frac{0-0}{t} = 0 \to 0 \quad \text{für } t \to 0,$$

also ist f in $(0,0)$ partiell nach x differenzierbar mit $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = 0$. Außerdem gilt

$$\frac{f(0,t) - f(0,0)}{t} = \frac{1}{t} \cdot \frac{t^3 - 0}{0 + t^2} = 1 \to 1 \quad \text{für } t \to 0,$$

also ist f in $(0,0)$ auch partiell nach y differenzierbar mit $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = 1$.

(iii) Die partiellen Ableitungen sind in $(0,0)$ unstetig, denn es gilt

$$\frac{\partial f}{\partial x}\left(\tfrac{1}{k}, \tfrac{1}{k}\right) = -\frac{4k^{-4}}{(k^{-2} + k^{-2})^2} = -1 \xrightarrow{k\to\infty} -1 \neq 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$$

und

$$\frac{\partial f}{\partial y}\left(\tfrac{1}{k}, 0\right) = \frac{0 - k^{-4} + 0}{(k^{-2} + 0)^2} = -1 \xrightarrow{k\to\infty} -1 \neq 1 = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\,.$$

Aufgabe 32: (Präsensaufgabe)
Geben Sie ein Beispiel an für

(i) eine Menge $D \subset \mathbb{R}^k$, ein $x_0 \in D$ und eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$, die in x_0 partiell differenzierbar, aber nicht stetig ist.

(ii) eine Menge $D \subset \mathbb{R}^k$, ein $x_0 \in D$ und eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$, die in x_0 stetig, aber nicht partiell differenzierbar ist.

(iii) eine offene Menge $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}^k$ und eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$, die auf D partiell differenzierbar, aber nicht stetig partiell differenzierbar ist.

Lösungsvorschlag:

(i) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x,y) := \begin{cases} \frac{x^2y^4+xy^3}{x^6+y^6}, & (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \\ 0, & (x,y) = (0,0), \end{cases}$

und $x_0 := (0,0)$.

(ii) $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) := |x|$ und $x_0 := 0$.

(iii) $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) := \begin{cases} |x|^2 \sin\left(\frac{1}{|x|}\right), & x \in \mathbb{R}^k \setminus \{0\}, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$