Institut für Analysis
Prof. Dr. Dirk Hundertmark
Dr. Markus Lange

SoSe 2019
05.06.2019

Analysis 2

Aufgabenzettel 7

Abgabe bis 12. Juni 2019, 10:00 Uhr

Erinnerung:
Die Klausur zur Vorlesung Analysis 2 findet am **17. September 2019** von **11 - 13 Uhr** statt.

Die Anmeldung zur Klausur ist ab sofort möglich. **Anmeldeschluss** ist der **01. September 2019**. Eine Anmeldung nach diesem Termin ist **NICHT** möglich.
Studenten die den Übungsschein benötigen können sich erst anmelden wenn Sie den Übungsschein bestanden haben.

Die Anmeldung erfolgt über Campus Management für Studierende.
Diese und weitere Informationen finden Sie unter

`http://www.math.kit.edu/iana3/~schmoeger/seite/termin/de`

Aufgabe 33: (K)

(i) Sei $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x,y) = \ln(\sqrt{x^2+y^2})$. Zeigen Sie, dass

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x,y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x,y) = 0$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ gilt.

(ii) Seien $f, g \in C^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ und $c > 0$. Die Funktion $u : \mathbb{R}^2 \to R$ ist definiert durch

$$u(t,x) = f(x-ct) + g(x+ct)$$

für $(t,x) \in \mathbb{R}^2$. Zeigen Sie, dass u die *Wellengleichung*

$$\frac{\partial^2}{\partial t \partial t} u(t,x) = c^2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial x} u(t,x)$$

für alle $(t,x) \in \mathbb{R}^2$ erfüllt.

(iii) Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $u : (0,\infty) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definiert durch $u(t,x) := (2\pi t)^{-\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{\|x\|^2}{4t}\right)$. Zeigen Sie, dass u die Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}(t,x)\,.$$

für alle $(t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^n$ löst.

— **Bitte wenden!** —

Aufgabe 34: Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\,, & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0\,, & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(i) Berechnen Sie alle partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung von f.

(ii) Zeigen Sie, dass die ersten partiellen Ableitung von f stetig auf $\mathbb{R}^2$ sind.

(iii) Zeigen Sie, dass f_{xy} und f_{yx} auf ganz $\mathbb{R}^2$ existieren, aber im Nullpunkt nicht übereinstimmen.

Aufgabe 35: (K)
Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und seien $f, g : U \to \mathbb{R}^m$ differenzierbar in $x_0 \in U$. Weiter sei

$$d : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \quad ; \quad x \mapsto d(x) := \langle f(x), g(x) \rangle$$

wobei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das kanonische Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^m$ sei.
Zeigen Sie, dass die Funktion d in x_0 differenzierbar ist und berechnen Sie $Dd(x_0)$.
Hinweis: Auf gar keinen Fall sollte man hier partielle Ableitungen benutzen.

Aufgabe 36: Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar auf ganz U.

(i) Sei $[x,y] := \{x + t(y-x) \,:\, 0 \leq t \leq 1\}$ und $(x,y) := \{x + t(y-x) \,:\, 0 < t < 1\}$.
Zeigen Sie, dass für Punkte $x, y \in U$ mit $[x,y] \subset U$ ein $z \in (x,y)$ existiert, so dass

$$f(y) = f(x) + Df(z)(y-x)\,.$$

(ii) Machen Sie sich klar warum dies ein n-dim Analogon des Mittelwertsatzes ist.

Aufgabe 37: (Präsensaufgabe)
Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $x \in U$ ein Punkt in U und $f : U \to \mathbb{R}^m$ eine Funktion.

(i) Wie ist die Richtungsableitung von f in Richtung $v \in \mathbb{R}^n$ an der Stelle x definiert?

(ii) Kann man die j-te partielle Ableitung von f an der Stelle x durch eine Richtungsableitung ausdrücken und wenn ja wie sieht diese aus?

(iii) Wann heißt die Funktion f differenzierbar in x?