Institut für Analysis
Prof. Dr. Dirk Hundertmark
Dr. Markus Lange

SoSe 2019
05.06.2019

Analysis 2

Aufgabenzettel 7

Abgabe bis 12. Juni 2019, 10:00 Uhr

Erinnerung:
Die Klausur zur Vorlesung Analysis 2 findet am **17. September 2019** von **11 - 13 Uhr** statt.

Die Anmeldung zur Klausur ist ab sofort möglich. **Anmeldeschluss** ist der **01. September 2019**. Eine Anmeldung nach diesem Termin ist **NICHT** möglich.
Studenten die den Übungsschein benötigen können sich erst anmelden wenn Sie den Übungsschein bestanden haben.

Die Anmeldung erfolgt über Campus Management für Studierende.
Diese und weitere Informationen finden Sie unter

`http://www.math.kit.edu/iana3/~schmoeger/seite/termin/de`

Aufgabe 33: (K)

(i) Sei $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x,y) = \ln(\sqrt{x^2+y^2})$. Zeigen Sie, dass

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x,y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x,y) = 0$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ gilt.

(ii) Seien $f, g \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ und $c > 0$. Die Funktion $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ist definiert durch

$$u(t,x) = f(x-ct) + g(x+ct)$$

für $(t,x) \in \mathbb{R}^2$. Zeigen Sie, dass u die *Wellengleichung*

$$\frac{\partial^2}{\partial t \partial t} u(t,x) = c^2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial x} u(t,x)$$

für alle $(t,x) \in \mathbb{R}^2$ erfüllt.

(iii) Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $u : (0,\infty) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definiert durch $u(t,x) := (2\pi t)^{-\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{\|x\|^2}{4t}\right)$. Zeigen Sie, dass u die Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}(t,x)\,.$$

für alle $(t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^n$ löst.

— **Bitte wenden!** —

Lösungsvorschlag:

(i) Sei $f : \mathbb{R}^2 \setminus (0,0) \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x,y) = \ln(\sqrt{x^2+y^2})$.
Behauptung: $\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x,y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x,y) = 0$.

Beweis. Sei $x, y \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Aus der Definition der partiellen Ableitung (Definition 10.3) und den Ableitungsregeln (Lemma 10.4) folgt,

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{2x}{x^2+y^2}\,.$$

Wir differenzieren erneut partiell

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial}{\partial x} f(x,y)\Big) = \frac{2(x^2+y^2) - 4x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2y^2 - 2x^2}{(x^2+y^2)^2}\,.$$

Aus der Symmetrie $f(x,y) = f(y,x)$ folgt

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(y,x) = \frac{2x^2 - 2y^2}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x,y). \qquad \square$$

(ii) Seien $f, g \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ und $c > 0$. Die Funktion $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ist definiert durch

$$u(t,x) = f(x - ct) + g(x + ct)\,.$$

Behauptung: Die Funktion u erfüllt die *Wellengleichung*

$$\frac{\partial^2}{\partial t \partial t} u(t,x) = c^2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial x} u(t,x) \tag{1}$$

für alle $(t,x) \in \mathbb{R}^2$.

Beweis. Sei $(t,x) \in \mathbb{R}^2$. Wir berechnen die partiellen Ableitungen

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) &= f'(x-ct)(-c) + g'(x+ct)c,\\
\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial t}(t,x) &= f''(x-ct)c^2 + g''(x+ct)c^2,\\
\frac{\partial u}{\partial x}(t,x) &= f'(x-ct) + g'(x+ct),\\
\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial x}(t,x) &= f''(x-ct) + g''(x+ct).
\end{aligned}$$

Einsetzen in Gleichung (1) zeigt die Behauptung. $\square$

(iii) *Voraussetzung:* Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $u : (0,\infty) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$u(t,x) := (2\pi t)^{-\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{\|x\|^2}{4t}\right)\,.$$

Behauptung: Für alle $(t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^n$ gilt

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_j^2}(t,x)\,.$$

Beweis. Es sei $(t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^n$ und $j \in \{1,...,n\}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) &= -\pi^{-\frac{n}{2}} n (2t)^{-\frac{n}{2}-1} \exp\left(-\frac{\|x\|^2}{4t}\right) + (2\pi t)^{-\frac{n}{2}} \frac{\|x\|^2}{4t^2} \exp\left(-\frac{\|x\|^2}{4t}\right) \\ &= -n\pi^{-\frac{n}{2}}(2t)^{-\frac{n}{2}-1} \exp\left(-\frac{\|x\|^2}{4t}\right) + \pi^{-\frac{n}{2}}(2t)^{-\frac{n}{2}-2}\|x\|^2 \exp\left(-\frac{\|x\|^2}{4t}\right), \qquad (2)\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x_j}(t,x) &= (2\pi t)^{-\frac{n}{2}} \left(-\frac{x_j}{2t}\right) \exp\left(-\frac{\|x\|^2}{4t}\right) \\ &= -\pi^{-\frac{n}{2}}(2t)^{-\frac{n}{2}-1} x_j \exp\left(-\frac{\|x\|^2}{4t}\right),\end{aligned}$$

sowie

$$\frac{\partial u}{\partial x_j^2}(t,x) = -\pi^{-\frac{n}{2}}(2t)^{-\frac{n}{2}-1} \exp\left(-\frac{\|x\|^2}{4t}\right) + \pi^{-\frac{n}{2}}(2t)^{-\frac{n}{2}-2} x_j^2 \exp\left(-\frac{\|x\|^2}{4t}\right).$$

Also gilt

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_j^2}(t,x) &= \sum_{j=1}^n -\pi^{-\frac{n}{2}}(2t)^{-\frac{n}{2}-1} \exp\left(-\frac{\|x\|^2}{4t}\right) + \sum_{j=1}^n \pi^{-\frac{n}{2}}(2t)^{-\frac{n}{2}-2} x_j^2 \exp\left(-\frac{\|x\|^2}{4t}\right) \\ &= -n\pi^{-\frac{n}{2}}(2t)^{-\frac{n}{2}-1} \exp\left(-\frac{\|x\|^2}{4t}\right) + \pi^{-\frac{n}{2}}(2t)^{-\frac{n}{2}-2} \exp\left(-\frac{\|x\|^2}{4t}\right) \sum_{j=1}^n x_j^2 \\ &= -n\pi^{-\frac{n}{2}}(2t)^{-\frac{n}{2}-1} \exp\left(-\frac{\|x\|^2}{4t}\right) + \pi^{-\frac{n}{2}}(2t)^{-\frac{n}{2}-2}\|x\|^2 \exp\left(-\frac{\|x\|^2}{4t}\right) \\ &\overset{(2)}{=} \frac{\partial u}{\partial t}(t,x).\end{aligned}$$

□

Aufgabe 34: Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(i) Berechnen Sie alle partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung von f.

(ii) Zeigen Sie, dass die ersten partiellen Ableitung von f stetig auf $\mathbb{R}^2$ sind.

(iii) Zeigen Sie, dass f_{xy} und f_{yx} auf ganz $\mathbb{R}^2$ existieren, aber im Nullpunkt nicht übereinstimmen.

Lösungsvorschlag:

(i) Auf der offenen Menge $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ ist f offensichtlich beliebig oft partiell differenzierbar; mit der Produktregel erhält man für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{3x^2y - y^3}{x^2+y^2} - \frac{2x(x^3y - xy^3)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{3x^2y-y^3}{x^2+y^2} - \frac{2x^4y - 2x^2y^3}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y(x^4+4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2},$$

und damit

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) &= \frac{6xy}{x^2+y^2} - \frac{2x(3x^2y-y^3)}{(x^2+y^2)^2} - \frac{8x^3y-4xy^3}{(x^2+y^2)^2} + \frac{4x(2x^4y-2x^2y^3)}{(x^2+y^2)^3} \\ &= \frac{6xy}{x^2+y^2} - \frac{2xy(7x^2-3y^2)}{(x^2+y^2)^2} + \frac{8x^3y(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^3} = -\frac{4xy^3(x^2-3y^2)}{(x^2+y^2)^3},\end{aligned}$$

— Bitte wenden! —

sowie

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) &= \frac{3x^2-3y^2}{x^2+y^2} - \frac{2y(3x^2y-y^3)}{(x^2+y^2)^2} - \frac{2x^4-6x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{4y(2x^4y-2x^2y^3)}{(x^2+y^2)^3} \\ &= \frac{3(x^2-y^2)}{x^2+y^2} - \frac{2(x^4-y^4)}{(x^2+y^2)^2} + \frac{8x^2y^2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^3} = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + \frac{8x^2y^2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^3} \\ &= \frac{x^6+9x^4y^2-9x^2y^4-y^6}{(x^2+y^2)^3}\,.\end{aligned}$$

Es bleibt der Nullpunkt zu untersuchen. Es gilt

$$\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = \frac{0-0}{t} \to 0 \quad \text{für } t \to 0,$$

also gilt nach Definition $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = 0$. Damit ergibt sich dann auch

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(t,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0-0}{t} \to 0 \quad \text{für } t \to 0,$$

also gilt nach Definition $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(t,0)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{t} = 0$.
Schließlich gilt

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,t) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{t} = \frac{-t-0}{t} \to -1 \quad \text{für } t \to 0,$$

also erhalten wir für die gemischte partielle Ableitung

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,t) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{t} = -1.$$

Aus der Definition von f folgt offensichtlich $f(x,y) = -f(y,x)$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, also existieren auch die partiellen Ableitungen nach y, und es gilt

$$\frac{\partial f}{\partial y} f(x,y) = \frac{d}{dt} f(x,t)\Big|_{t=y} = \frac{d}{dt}(-f(t,x))\Big|_{t=y} = -\frac{\partial f}{\partial x} f(y,x) \tag{3}$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, und mit dem gleichen Argument folgt auch

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} f(x,y) = \frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial y}(x,t)\Big|_{t=y} \overset{(3)}{=} \frac{d}{dt}\Big(-\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\Big)\Big|_{t=y} = -\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} f(y,x)$$

und

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} f(x,y) = \frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial y}(t,y)\Big|_{t=x} \overset{(3)}{=} \frac{d}{dt}\Big(-\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\Big)\Big|_{t=y} = -\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} f(y,x)$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ (die noch fehlenden Ableitungen erhält man also durch Vertauschen von x und y und einen Vorzeichenwechsel aus den schon bekannten). Insbesondere bedeutet dies

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0\,, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = 0\,, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = -\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 1\,.$$

(ii) *Behauptung*: Die ersten partiellen Ableitung von f sind stetig auf $\mathbb{R}^2$.
Beweis. Sei $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ und $m := \max\{|x|, |y|\} \le \|(x,y)\|$, dann folgt

$$|f_x(x,y)| \le \frac{|3x^2y| + |y^3|}{x^2+y^2} + \frac{|2x^4y| + |2x^2y^3|}{(x^2+y^2)^2} \le \frac{3m^3+m^3}{m^2} + \frac{2m^5+2m^5}{(m^2)^2} = 8m \le 8\|(x,y)\|.$$

Also gilt $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \to 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ für $(x,y) \to (0,0)$, d. h. $\frac{\partial f}{\partial x}$ ist in $(0,0)$ stetig. Auf der offenen Menge $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ ist $\frac{\partial f}{\partial x}$ als Komposition stetiger Funktionen ebenfalls stetig, also ist $\frac{\partial f}{\partial x}$ auf ganz $\mathbb{R}^2$ stetig. Wegen $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\frac{\partial f}{\partial x}(y,x)$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ ist auch $\frac{\partial f}{\partial y}$ stetig als Komposition stetiger Funktionen (genauer gilt $\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\partial f}{\partial x} \circ A$ mit $A(x,y) = (y,x)$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$). Damit sind die ersten partiellen Ableitung von f stetig auf $\mathbb{R}^2$. Oder anders ausgedrückt $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. □

(iii) *Behauptung*: f_{xy} und f_{yx} existieren auf ganz $\mathbb{R}^2$ aber im Nullpunkt stimmen sie nicht überein.
Beweis. Auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ gilt nach (i)
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = -\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(y,x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)\,,$$
aber nach (i) gilt auch $f_{xy}(0,0) = -1 \neq 1 = f_{yx}(0,0)$. Also exitieren f_{xy} und f_{yx} auf ganz $\mathbb{R}^2$ und stimmen im Nullpunkt nicht überein. □

Aufgabe 35: (K)
Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und seien $f, g : U \to \mathbb{R}^m$ differenzierbar in $x_0 \in U$. Weiter sei
$$d : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \quad ; \quad x \mapsto d(x) := \langle f(x), g(x) \rangle$$
wobei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das kanonische Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^m$ sei.
Zeigen Sie, dass die Funktion d in x_0 differenzierbar ist und berechnen Sie $Dd(x_0)$.
Hinweis: Auf gar keinen Fall sollte man hier partielle Ableitungen benutzen.

Lösungsvorschlag: Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und seien $f, g : U \to \mathbb{R}^m$ differenzierbar in $x_0 \in U$. Wir betrachten zunächst das kanonische Skalarprodukt $v : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto \langle x, y \rangle$.
Behauptung: v ist differenzierbar und für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ ist die Ableitung gegeben durch
$$v'(x,y)(h_1,h_2) = \langle h_1, y \rangle + \langle x, h_2 \rangle, \quad (h_1,h_2) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m\,.$$

Beweis. Seien $x, y \in \mathbb{R}^m$, $h_1, h_2 \in \mathbb{R}^m$. Die Abbildung $(h_1,h_2) \mapsto \langle h_1, y \rangle + \langle x, h_2 \rangle$ ist eine lineare Abbildung von $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ nach $\mathbb{R}$. Es gilt
$$\begin{aligned} &v(x+h_1, y+h_2) - v(x,y) - \langle h_1, y \rangle - \langle x, h_2 \rangle \\ &\quad = \langle x, y \rangle + \langle h_1, y \rangle + \langle x, h_2 \rangle + \langle h_1, h_2 \rangle - \langle x, y \rangle - \langle h_1, y \rangle - \langle x, h_2 \rangle = \langle h_1, h_2 \rangle. \end{aligned}$$
Ferner gilt $\frac{|\langle h_1, h_2 \rangle|}{\|(h_1,h_2)\|_2} \leq \frac{|h_1|_2 |h_2|_2}{|h_1|_2 + |h_2|_2} \leq \frac{1}{2}\sqrt{|h_1|_2\,|h_2|_2} \to 0$ für $\|(h_1,h_2)\| \to 0$. Nach Definition 10.5 bedeutet dies, dass v in $(x,y) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ differenzierbar ist und dass, die Ableitung wie in der Behauptung gegeben ist. □

Sei nun $d : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\,;\, x \mapsto d(x) := \langle f(x), g(x) \rangle$.
Behauptung: Die Abbildung d ist differenzierbar in $x_0 \in U$ und es gilt für $h \in \mathbb{R}^n$
$$D_h d(x_0) = \langle D_h f(x_0), g(x_0) \rangle + \langle f(x_0), D_h g(x_0) \rangle\,.$$

Beweis. Wir wissen aus der Voraussetzung, dass $f, g : U \to \mathbb{R}^m$ differenzierbar in $x_0 \in U$ sind, d.h.,
$$\begin{aligned} \frac{1}{|h|_2}\left(f(x_0+h) - f(x_0) - D_h f(x_0)\right) \to 0 \quad &\text{für } h \to 0\,, \\ \frac{1}{|h|_2}\left(g(x_0+h) - g(x_0) - D_h g(x_0)\right) \to 0 \quad &\text{für } h \to 0\,. \end{aligned}$$

— Bitte wenden! —

Betrachte nun die Abbildung $u : U \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m, x \mapsto (f(x), g(x))$. Offensichtlich ist die Abbildung $h \mapsto (D_h f(x_0), D_h g(x_0))$ eine lineare Abbildung von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$. Sei nun $r > 0$ so, dass $B(x_0, r) \subseteq U$ und sei $h \in \mathbb{R}^n$ mit $|h|_2 < r$. Dann gilt

$$\begin{aligned} &u(x_0 + h) - u(x_0) - (D_h f(x_0), D_h g(x_0)) \\ &\qquad = (f(x_0 + h) - f(x_0) - D_h f(x_0), g(x_0 + h) - g(x_0) - D_h g(x_0)) \,. \end{aligned}$$

Aus der Differenzierbarkeit von f und g in x_0 folgt somit

$$\frac{1}{|h|_2} (u(x_0 + h) - u(x_0) - (D_h f(x_0), D_h g(x_0))) \to 0 \quad \text{für } h \to 0 \,.$$

Nach Definition 10.5 und Satz 10.6 bedeutet dies, dass u in x_0 die Ableitung

$$D_h u(x_0) = (D_h f(x_0), D_h g(x_0))$$

für $h \in \mathbb{R}^n$ besitzt. Damit folgt die Differenzierbarkeit der Abbildung d aus der Differenzierbarkeit des kanonischen Skalarprodukts v und der Abbildung u mit Hilfe der Kettenregel (Satz 10.9) da $d = v \circ u$. Man erhält für $x_0 \in U$ die Formel

$$\begin{aligned} D_h d(x_0) &= D_h v(u(x_0)) D_h u(x_0) \\ &= D_h v(f(x_0), g(x_0))(D_h f(x_0), D_h g(x_0)) \\ &= \langle D_h f(x_0), g(x_0) \rangle + \langle f(x_0), D_h g(x_0) \rangle, \quad h \in \mathbb{R}^n \,. \end{aligned}$$

□

Aufgabe 36: Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar auf ganz U.

(i) Sei $[x, y] := \{x + t(y - x) \,:\, 0 \leq t \leq 1\}$ und $(x, y) := \{x + t(y - x) \,:\, 0 < t < 1\}$. Zeigen Sie, dass für Punkte $x, y \in U$ mit $[x, y] \subset U$ ein $z \in (x, y)$ existiert, so dass

$$f(y) = f(x) + Df(z)(y - x) \,.$$

(ii) Machen Sie sich klar warum dies ein n-dim Analogon des Mittelwertsatzes ist.

Lösungsvorschlag: Sei $[x, y] \subset U$. Wir definieren $g : [0, 1] \to \mathbb{R}\,;\, t \mapsto f(x + t(y - x))$. Dann ist g differenzierbar auf $[0, 1]$ als Komposition reeller differenzierbarer Funktionen, da f per Voraussetzung stetig differenzierbar auf ganz U ist und x, y so gewählt sind, dass

$$\{x + t(y - x) \,:\, 0 \leq t \leq 1\} \subset U \,.$$

Mit der Kettenregel aus Analysis I erhalten wir für die Ableitung von g in $t \in [0, 1]$

$$g'(t) = f'(x + t(y - x)) \cdot (y - x) \,.$$

Der Mittelwertsatz der Differentialrechnung aus Analysis I liefert uns nun die Existenz eines $\xi \in (0, 1)$, so dass

$$\frac{g(1) - g(0)}{1 - 0} = g'(\xi) \,. \tag{4}$$

Aus der Definition von g folgt, dass

$$g(1) = f(x + 1(y - x)) = f(y) \,, \qquad \text{und} \qquad g(0) = f(x + 0(y - x)) = f(x) \,.$$

Einsetzen in die Gleichung (4) und umstellen ergibt

$$f(y) = f(x) + f'(x + \xi(y - x)) \cdot (y - x)$$

Da $[x, y] \subset U$ und $\xi \in (0, 1)$ folgt, dass auch $z := x + \xi(y - x) \in U$ ist und wir haben die Behauptung gezeigt. □

Aufgabe 37: (Präsensaufgabe)
Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $x \in U$ ein Punkt in U und $f : U \to \mathbb{R}^m$ eine Funktion.

(i) Wie ist die Richtungsableitung von f in Richtung $v \in \mathbb{R}^n$ an der Stelle x definiert?

(ii) Kann man die j-te partielle Ableitung von f an der Stelle x durch eine Richtungsableitung ausdrücken und wenn ja wie sieht diese aus?

(iii) Wann heißt die Funktion f differenzierbar in x?

Lösungsvorschlag: Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $x \in U$ ein Punkt in U und $f : U \to \mathbb{R}^m$ eine Funktion.

(i) Sei $v \in \mathbb{R}^n$. Dann heißt

$$D_v f(x) := \lim_{t \to 0} \frac{f(x+tv) - f(x)}{t} =: \frac{d}{dt} f(x+tv)|_{t=0}$$

die Richtungsableitung von f in Richtung $v \in \mathbb{R}^n$ an der Stelle $x \in U$.

(ii) Die j-te partielle Ableitung von f (in x) ist

$$\partial_j f(x) := \frac{\partial}{\partial x_j} f(x) := D_{e_j} f(x) = \frac{d}{dt} f(x+te_j)|_{t=0}$$

wobei e_j den j-te kanonische Basisvektor in $\mathbb{R}^n$ bezeichnet.

(iii) Die Funktion f heißt differenzierbar in $x \in U$, falls es ein $A \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ gibt mit

$$\lim_{y \to x} \frac{f(y) - f(x) - A(y-x)}{|y-x|} = 0\,.$$

Mit der Subsitution $y = x + h$ erhält man die äquivalente Form

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x) - Ah}{|h|} = 0\,.$$