Institut für Analysis
Prof. Dr. Dirk Hundertmark
Dr. Markus Lange

SoSe 2019
11.06.2019

Analysis 2

Aufgabenzettel 8

Abgabe bis 19. Juni 2019, 10:00 Uhr

Aufgabe 38: (K)
Es seien $\alpha \in \mathbb{R}$ und $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l$ homogen vom Grad α, das heißt, es gilt

$$f(tx) = t^\alpha f(x)$$

für alle $t > 0$ und alle $x \in \mathbb{R}^k \setminus \{0\}$.

(i) f sei differenzierbar auf $\mathbb{R}^k \setminus \{0\}$. Beweisen Sie die Identitäten

a) $f'(x) \cdot x = \alpha f(x)$ und

b) $f'(tx) = t^{\alpha-1} f'(x)$

für alle $x \in \mathbb{R}^k \setminus \{0\}$ und alle $t > 0$.

(ii) Es sei $\alpha = 1$ und f differenzierbar in 0. Beweisen Sie, dass f linear ist und bestimmen Sie die darstellende Matrix von f bezüglich der Standardbasis.

Aufgabe 39:

(i) Es seien $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$f(x, y, z) := 3x^2 + xy \quad \text{und} \quad g(x, y, z) := \begin{pmatrix} 1 + 3z \\ x^2 + y + z^2 \\ 4yz \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie jeweils f', g', $(f \circ g)'$, $(g \circ g)'$ und $(f \circ g \circ g)'$ im Punkt $(0, 0, 0)$.

(ii) Sei $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$g(r, \varphi, \theta) := \begin{pmatrix} r \cos\varphi \cos\theta \\ r \cos\varphi \sin\theta \\ r \sin\varphi \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie die Jacobimatrix von g für jedes $(r, \varphi, \theta) \in \mathbb{R}^3$.

b) Bestimmen Sie alle $(r, \varphi, \theta) \in \mathbb{R}^3$, für die $J_g(r, \varphi, \theta)$ invertierbar ist.

— Bitte wenden! —

Aufgabe 40: (K)
Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x_1, x_2) := x_1^2 + 5x_1x_2 + 3x_2^2$ und $a := \frac{1}{\sqrt{5}}(1,2) \in \mathbb{R}^2$.

(i) Zeigen Sie, dass für jedes $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ die Richtungsableitung $\frac{\partial f}{\partial a}(x_1, x_2)$ existiert und berechnen Sie diese.

(ii) Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definiert durch $g(t) := (\cos t, \sin t)$. Zeigen Sie, dass $h := f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar ist und berechnen Sie die Ableitung.

(iii) Beweisen Sie die Abschätzung

$$|f(x_1, x_2) - f(y_1, y_2)| \leq \sqrt{101} \cdot |(x_1, x_2) - (y_1, y_2)|$$

für alle $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ mit $\max\{|(x_1, x_2)|, |(y_1, y_2)|\} \leq 1$.

Aufgabe 41: Es seien $D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x, y > 0\}$ und $E := \{(u,v,w) \in \mathbb{R}^3 \colon w > 0\}$. Weiter seien die Funktionen $f : D \to \mathbb{R}^3$ und $g : E \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) := (\ln(xy), \cos(x^2 + y), \mathrm{e}^x),$$
$$g(u,v,w) := \mathrm{e}^u + vw + \log(w).$$

Zeigen Sie, dass $h := g \circ f$ auf D differenzierbar ist, und berechnen Sie die Ableitung

(i) nach der Kettenregel,

(ii) direkt, indem Sie $h(x,y)$ zunächst explizit berechnen und dann ableiten.

Aufgabe 42: Zeigen Sie, dass $\det : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}, A \mapsto \det(A)$ differenzierbar ist und berechnen Sie die Ableitung $\det'$.

Aufgabe 43: (Präsensaufgabe)
Sei $A \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. Die Operatornorm von A ist definiert als

$$\|A\| = \sup_{\substack{u \in \mathbb{R}^n \\ |u|=1}} |Au|,$$

wobei $|\cdot|$ hier die euklidische Norm in $\mathbb{R}^m$ bezeichnet. Wir können A auch als $m \times n$-Matrix darstellen. Sei also $A = (a_{jk})_{\substack{1\leq j\leq m \\ 1\leq k\leq n}}$, dann ist die Hilbert-Schmidt Norm von A definiert durch

$$\|A\|_{\mathrm{HS}} := \left(\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} |a_{jk}|^2\right)^{1/2}.$$

Zeigen Sie, dass $\|A\| \leq \|A\|_{\mathrm{HS}}$ für alle $A \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$.

Erinnerung:
Die Klausur zur Vorlesung Analysis 2 findet am **17. September 2019** von **11 - 13 Uhr** statt.

Die Anmeldung zur Klausur ist ab sofort möglich. **Anmeldeschluss** ist der **01. September 2019**. Eine Anmeldung nach diesem Termin ist **NICHT** möglich.
Studenten die den Übungsschein benötigen können sich erst anmelden wenn Sie den Übungsschein bestanden haben.

Die Anmeldung erfolgt über Campus Management für Studierende.
Diese und weitere Informationen finden Sie unter

`http://www.math.kit.edu/iana3/~schmoeger/seite/termin/de`