Karlsruhe Institute of Technology

Institut für Analysis
Prof. Dr. Dirk Hundertmark
Dr. Markus Lange

SoSe 2019
11.06.2019

Analysis 2

Aufgabenzettel 8

Abgabe bis 19. Juni 2019, 10:00 Uhr

Aufgabe 38: (K)
Es seien $\alpha \in \mathbb{R}$ und $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l$ homogen vom Grad α, das heißt, es gilt

$$f(tx) = t^\alpha f(x)$$

für alle $t > 0$ und alle $x \in \mathbb{R}^k \setminus \{0\}$.

(i) f sei differenzierbar auf $\mathbb{R}^k \setminus \{0\}$. Beweisen Sie die Identitäten

a) $f'(x) \cdot x = \alpha f(x)$ und

b) $f'(tx) = t^{\alpha-1} f'(x)$

für alle $x \in \mathbb{R}^k \setminus \{0\}$ und alle $t > 0$.

(ii) Es sei $\alpha = 1$ und f differenzierbar in 0. Beweisen Sie, dass f linear ist und bestimmen Sie die darstellende Matrix von f bezüglich der Standardbasis.

Lösungsvorschlag: *Voraussetzung:* Es seien $\alpha \in \mathbb{R}$ und $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l$ homogen vom Grad α, das heißt, es gilt

$$f(tx) = t^\alpha f(x)$$

für alle $t > 0$ und alle $x \in \mathbb{R}^k \setminus \{0\}$.

(i) Sei f differenzierbar auf $\mathbb{R}^k \setminus \{0\}$.

a) *Beweis:* Sei $x \in \mathbb{R}^k \setminus \{0\}$. Wir definieren die Abbildung $\varphi_x : (0, \infty) \to \mathbb{R}^l$ durch $\varphi_x(t) := f(tx)$. Einerseits ist nach der Kettenregel φ_x differenzierbar mit

$$\varphi_x'(t) = f'(tx) \cdot x$$

für alle $t > 0$. Anderseits kann man die Homogenität von f verwenden und es gilt $\varphi_x(t) = t^\alpha f(x)$ für alle $t > 0$. Somit erhalten wir

$$\varphi_x'(t) = \alpha t^{\alpha-1} f(x)$$

für alle $t > 0$. Einsetzen von $t = 1$ in beide Ableitungsformeln liefert

$$f'(x) \cdot x = \varphi_x'(1) = \alpha f(x) . \quad \square$$

— **Bitte wenden!** —

b) *Beweis:* Sei $t > 0$. Definiere $g_t : \mathbb{R}^k \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^l$ durch $g_t(x) := f(tx)$. Die Ableitung von $x \mapsto tx$ für $x \in \mathbb{R}^k$ ist $t \cdot I_k$, wobei I_k die k-dimensionale Einheitsmatrix bezeichnet. Einerseits erhält man mit der Kettenregel damit $g_t'(x) = f'(tx) \cdot t \cdot I_k = tf'(tx)$ für alle $x \in \mathbb{R}^k \setminus \{0\}$. Wegen der Homogenität von f kann man $g_t(x) = t^\alpha f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^k \setminus \{0\}$ schreiben und erhält folglich andererseits $g_t'(x) = t^\alpha f'(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^k \setminus \{0\}$. Gleichsetzen der beiden Ausdrücke für die Ableitung von g_t liefert

$$f'(tx) = \frac{1}{t} \cdot g_t'(x) = t^{\alpha-1} f'(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}^k \setminus \{0\}$. □

(ii) Es sei $\alpha = 1$ und f differenzierbar in 0.
Beweis: Sei $x \in \mathbb{R}^k$. Da f in 0 differenzierbar ist, ist f in 0 stetig. Mit Hilfe der Homogenität von f gilt daher

$$f(0) = f\left(\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} x\right) = \lim_{k\to\infty} f\left(\frac{1}{k} x\right) = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} f(x) = 0.$$

Behauptung: Es gilt $f(y) = f'(0) \cdot y$ für alle $y \in \mathbb{R}^k$.
Beweis der Behauptung: Sei $y \in \mathbb{R}^k$. Ist $y = 0$, so folgt aus dem Obigen $f(0) = 0 = f'(0) \cdot 0$. Sei nun $y \neq 0$. Wir definieren

$$r_n := \frac{f\left(\frac{1}{n} y\right) - f(0) - f'(0) \cdot \frac{1}{n} y}{\left|\frac{1}{n} y\right|}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Nach der Definition der Differenzierbarkeit gilt $r_n \to 0$ für $n \to \infty$. Mit Hilfe der Homogenität von f und da $f(0) = 0$ ist können wir r_n umformen und erhalten

$$r_n = \frac{\frac{1}{n} f(y) - 0 - \frac{1}{n} f'(0) \cdot y}{\frac{1}{n} |y|} = \frac{1}{|y|} \big(f(y) - f'(0) \cdot y\big)$$

somit ist die Folge $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konstant. Also muss sie schon gleich ihrem Grenzwert 0 sein. Es gilt damit

$$f(y) - f'(0) \cdot y = 0, \quad \text{also} \quad f(y) = f'(0) \cdot y\,.$$

Dies zeigt Behauptung.
Aus der Behauptung folgt direkt die Linearität von f. Sei $a, b \in \mathbb{R}$ und $x, y \in \mathbb{R}^k$ dann gilt

$$f(ax + by) = f'(0) \cdot (ax + by) = f'(0) \cdot ax + f'(0) \cdot by = f(ax) + f(by) = af(x) + bf(y)$$

wobei wir in der letzten Gleichung die Homogenität vom Grad 1 von f verwendet haben. Die darstellende Matrix von f ist auf Grund der gezeigten Behauptung gerade $J_f(0)$, die Jacobimatrix an der Stelle 0.

Aufgabe 39:

(i) Es seien $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$f(x, y, z) := 3x^2 + xy \quad \text{und} \quad g(x, y, z) := \begin{pmatrix} 1 + 3z \\ x^2 + y + z^2 \\ 4yz \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie jeweils f', g', $(f \circ g)'$, $(g \circ g)'$ und $(f \circ g \circ g)'$ im Punkt $(0, 0, 0)$.

(ii) Sei $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$g(r,\varphi,\theta) := \begin{pmatrix} r\cos\varphi\cos\theta \\ r\cos\varphi\sin\theta \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie die Jacobimatrix von g für jedes $(r,\varphi,\theta) \in \mathbb{R}^3$.

b) Bestimmen Sie alle $(r,\varphi,\theta) \in \mathbb{R}^3$, für die $J_g(r,\varphi,\theta)$ invertierbar ist.

Lösungsvorschlag:

(i) *Voraussetzung:* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sind definiert durch

$$f(x,y,z) := 3x^2 + xy \quad \text{und} \quad g(x,y,z) := \begin{pmatrix} 1+3z \\ x^2+y+z^2 \\ 4yz \end{pmatrix}.$$

Behauptung: Es gilt

$$f'(0,0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad g'(0,0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$(f\circ g)'(0,0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 18 \end{pmatrix}, \quad (g\circ g)'(0,0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{und} \quad (f\circ g\circ g)'(0,0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

Beweis: f und g sind unendlich oft differenzierbar, also sind alle vorkommenden Ausdrücke definiert. Es gilt

$$f'(x,y,z) = \begin{pmatrix} 6x+y & x & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad g'(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 2x & 1 & 2z \\ 0 & 4z & 4y \end{pmatrix}$$

für alle $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Durch Einsetzen des Ursprungs erhält man

$$f'(0,0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad g'(0,0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad g(0,0,0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dies ergibt

$$f'(g(0,0,0)) = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad g'(g(0,0,0)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{und} \quad g(g(0,0,0)) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und somit

$$f'(g(g(0,0,0))) = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Mit der Kettenregel folgt daher

$$(f\circ g)'(0,0,0) = f'(g(0,0,0)) \cdot g'(0,0,0) = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 18 \end{pmatrix}$$

— Bitte wenden! —

und

$$
\begin{aligned}
(g\circ g)'(0,0,0) = g'(g(0,0,0))\cdot g'(0,0,0) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3\\ 2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 6\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

sowie

$$
\begin{aligned}
(f\circ g\circ g)'(0,0,0) &= f'(g(g(0,0,0)))\cdot g'(g(0,0,0))\cdot g'(0,0,0)\\
&= \begin{pmatrix} 7 & 1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3\\ 2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} 7 & 1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 6\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 6\end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

(ii) *Voraussetzung:* Sei $g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ definiert durch

$$
g(r,\varphi,\theta) := \begin{pmatrix} r\cos\varphi\cos\theta\\ r\cos\varphi\sin\theta\\ r\sin\varphi\end{pmatrix}.
$$

a) *Behauptung:* Es gilt

$$
J_g(r,\varphi,\theta) = \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\theta & -r\sin\varphi\cos\theta & -r\cos\varphi\sin\theta\\ \cos\varphi\sin\theta & -r\sin\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\cos\theta\\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0\end{pmatrix}
$$

für alle $(r,\varphi,\theta)\in\mathbb{R}^3$.
Beweis: Man kann die Behauptung mit Hilfe der partiellen Ableitungen unmittelbar nachrechnen.

b) *Behauptung:* $J_g(r,\varphi,\theta)$ ist genau dann invertierbar, wenn

$$
r\neq 0 \quad\text{und}\quad \varphi\notin\{x\in\mathbb{R}\mid \exists k\in\mathbb{Z}: x=\frac{\pi}{2}+k\pi\}
$$

gilt.
Beweis: Es gilt mit $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ für alle $\alpha\in\mathbb{R}$, dass

$$
\begin{aligned}
\det J_g(r,\varphi,\theta) &= \det\begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\theta & -r\sin\varphi\cos\theta & -r\cos\varphi\sin\theta\\ \cos\varphi\sin\theta & -r\sin\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\cos\theta\\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0\end{pmatrix}\\
&= -r^2\sin^2\varphi\cos\varphi\cos^2\theta - r^2\sin^2\varphi\cos\varphi\sin^2\theta - r^2\cos^3\varphi\cos^2\theta\\
&\quad - r^2\cos^3\varphi\sin^2\theta\\
&= -r^2\cos\varphi\big(\sin^2\varphi(\sin^2\theta+\cos^2\theta)+\cos^2\varphi(\sin^2\theta+\cos^2\theta)\big)\\
&= -r^2\cos\varphi\big(\sin^2\varphi+\cos^2\varphi\big)\\
&= -r^2\cos\varphi.
\end{aligned}
$$

Eine Matrix ist genau dann invertierbar, wenn ihre Determinante nicht 0 ist. Es gilt

$$
-r^2\cos\varphi = 0 \iff r=0 \text{ oder } \varphi\in\{x\in\mathbb{R}\mid\exists k\in\mathbb{Z}: x=\frac{\pi}{2}+k\pi\}.
$$

Zusammengenommen ist $J_g(r,\varphi,\theta)$ genau dann invertierbar, wenn $r\neq 0$ und $\varphi\notin\{x\in\mathbb{R}\mid\exists k\in\mathbb{Z}: x=\frac{\pi}{2}+k\pi\}$ gilt.

Aufgabe 40: (K)
Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x_1, x_2) := x_1^2 + 5x_1x_2 + 3x_2^2$ und $a := \frac{1}{\sqrt{5}}(1, 2) \in \mathbb{R}^2$.

(i) Zeigen Sie, dass für jedes $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ die Richtungsableitung $\frac{\partial f}{\partial a}(x_1, x_2)$ existiert und berechnen Sie diese.

(ii) Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definiert durch $g(t) := (\cos t, \sin t)$. Zeigen Sie, dass $h := f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar ist und berechnen Sie die Ableitung.

(iii) Beweisen Sie die Abschätzung

$$|f(x_1, x_2) - f(y_1, y_2)| \leq \sqrt{101} \cdot |(x_1, x_2) - (y_1, y_2)|$$

für alle $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ mit $\max\{|(x_1, x_2)|, |(y_1, y_2)|\} \leq 1$.

Lösungsvorschlag:

(i) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x_1, x_2) := x_1^2 + 5x_1x_2 + 3x_2^2$ und $a := \frac{1}{\sqrt{5}}(1, 2) \in \mathbb{R}^2$.
Behauptung: Für jedes $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ existiert die Richtungsableitung $\frac{\partial f}{\partial a}(x_1, x_2)$ und es gilt

$$\frac{\partial f}{\partial a}(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{5}}(12x_1 + 17x_2).$$

Beweis: Die Funktion f ist differenzierbar mit

$$\nabla f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 2x_1 + 5x_2 \\ 5x_1 + 6x_2 \end{pmatrix}.$$

Damit existiert in jedem Punkt von $\mathbb{R}^2$ die Richtungsableitung in jede Richtung und es gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial a}(x_1, x_2) &= \nabla f(x_1, x_2)^T \cdot a = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2x_1 + 5x_2 & 5x_1 + 6x_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\big(2x_1 + 5x_2 + 2(5x_1 + 6x_2)\big) = \frac{1}{\sqrt{5}}(12x_1 + 17x_2). \end{aligned}$$

(ii) Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definiert durch $g(t) := (\cos t, \sin t)$.
Behauptung: $h := f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist differenzierbar und es gilt

$$h'(t) = -5\sin^2 t + 4 \sin t \cos t + 5 \cos^2 t.$$

Beweis: g ist differenzierbar mit $g'(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Laut Kettenregel ist damit auch h differenzierbar und es gilt

$$\begin{aligned} h'(t) = f'(g(t))g'(t) &= \nabla f(\cos t, \sin t)^T \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2\cos t + 5 \sin t & 5 \cos t + 6 \sin t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \\ &= -2 \cos t \sin t - 5 \sin^2 t + 5 \cos^2 t + 6 \sin t \cos t \\ &= -5 \sin^2 t + 4 \sin t \cos t + 5 \cos^2 t \end{aligned}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$.

— Bitte wenden! —

(iii) *Behauptung:* Für alle $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ mit $\max\{(x_1, x_2), (y_1, y_2)\} \leq 1$ gilt

$$|f(x_1, x_2) - f(y_1, y_2)| \leq \sqrt{101} \cdot |(x_1, x_2) - (y_1, y_2)|\,.$$

Beweis: Seien $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ mit $\max\{|x_1, x_2|\,, |y_1, y_2|\} \leq 1$. Wir haben also $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \overline{B}_1(0,0)$. Nach dem Mittelwertsatz gibt es ein $(\xi_1, \xi_2) \in [(x_1, x_2), (y_1, y_2)]$ mit $f(x_1, x_2) - f(y_1, y_2) = f'(\xi_1, \xi_2) \cdot ((x_1, x_2) - (y_1, y_2))$. Da $\overline{B}_1(0,0)$ konvex ist, ist $(\xi_1, \xi_2) \in \overline{B}_1(0,0)$, also $|(\xi_1, \xi_2)| \leq 1$. Mit $ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$ für alle $a, b \geq 0$ folgt damit

$$\begin{aligned}
\left|f'(\xi_1, \xi_2)\right|^2 &= \left|\begin{pmatrix} 2\xi_1 + 5\xi_2 & 5\xi_1 + 6\xi_2 \end{pmatrix}\right|^2 = (2\xi_1 + 5\xi_2)^2 + (5\xi_1 + 6\xi_2)^2 \\
&= 4\xi_1^2 + 20\xi_1\xi_2 + 25\xi_2^2 + 25\xi_1^2 + 60\xi_1\xi_2 + 36\xi_2^2 \\
&= 29\xi_1^2 + 80\xi_1\xi_2 + 61\xi_2^2 \\
&\leq 61(\xi_1^2 + \xi_2^2) + 80\Big(\frac{1}{2}(\xi_1^2 + \xi_2^2)\Big) \\
&= 101\,|(\xi_1, \xi_2)|^2 \leq 101.
\end{aligned}$$

Mit der Cauchy-Schwarzschen-Ungleichung erhalten wir daraus

$$\begin{aligned}
|f(x_1, x_2) - f(y_1, y_2)| &= \left|f'(\xi_1, \xi_2) \cdot ((x_1, x_2) - (y_1, y_2))\right| \\
&\leq \left|f'(\xi_1, \xi_2)\right| \cdot |(x_1, x_2) - (y_1, y_2)| \\
&\leq \sqrt{101} \cdot |(x_1, x_2) - (y_1, y_2)|\,. \quad \square
\end{aligned}$$

Aufgabe 41: Es seien $D := \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x, y > 0\big\}$ und $E := \big\{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3 \colon w > 0\big\}$. Weiter seien die Funktionen $f : D \to \mathbb{R}^3$ und $g : E \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$\begin{aligned}
f(x, y) &:= (\ln(xy), \cos(x^2 + y), \mathrm{e}^x), \\
g(u, v, w) &:= \mathrm{e}^u + vw + \log(w).
\end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass $h := g \circ f$ auf D differenzierbar ist, und berechnen Sie die Ableitung

(i) nach der Kettenregel,

(ii) direkt, indem Sie $h(x, y)$ zunächst explizit berechnen und dann ableiten.

Lösungsvorschlag:

(i) Behauptung: $h := g \circ f$ ist auf D differenzierbar.

Beweis:. Nach den Ableitungsregeln aus Analysis I erhalten wir für $(x, y) \in D$, bzw. $(u, v, w) \in E$ die folgenden Jacobi-Matrizen

$$J_f(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{x} & \frac{1}{y} \\ -2x\sin(x^2 + y) & -\sin(x^2 + y) \\ \mathrm{e}^x & 0 \end{pmatrix}, \quad J_g(u, v, w) = \left(\mathrm{e}^u, w, v + \frac{1}{w}\right).$$

Da alle auftretenden partiellen Ableitungen auf ihren zugehörigen Definitionsbereichen stetig sind, liefert Satz 12.4 die Differenzierbarkeit von f auf D, bzw. g auf E. Außerdem gilt $f(D) \subseteq E$. Nach der Kettenregel (Satz 10.9) ist $h := g \circ f$ differenzierbar auf D und für alle $(x,y) \in D$ gilt

$$\begin{aligned}
h'(x,y) &= J_g(f(x,y)) \cdot J_f(x,y) \\
&= \left(\mathrm{e}^u, w, v + \frac{1}{w}\right)\Bigg|_{(u,v,w)=f(x,y)} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{x} & \frac{1}{y} \\ -2x\sin(x^2+y) & -\sin(x^2+y) \\ \mathrm{e}^x & 0 \end{pmatrix} \\
&= \left(xy, \mathrm{e}^x, \cos(x^2+y) + \mathrm{e}^{-x}\right) \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{x} & \frac{1}{y} \\ -2x\sin(x^2+y) & -\sin(x^2+y) \\ \mathrm{e}^x & 0 \end{pmatrix} \\
&= \left(y - 2x\mathrm{e}^x \sin(x^2+y) + \mathrm{e}^x\cos(x^2+y) + 1, x - \mathrm{e}^x\sin(x^2+y)\right).
\end{aligned}$$

□

(ii) <u>*Behauptung:*</u> $h := g \circ f$ ist auf D differenzierbar.

<u>*Beweis:*</u>. Für $(x,y) \in D$ gilt

$$h(x,y) = g(f(x,y)) = xy + \mathrm{e}^x\cos(x^2+y) + x$$

und somit ist h nach den Ableitungsregeln aus Analysis I stetig partiell differenzierbar, also differenzierbar und für $(x,y) \in D$ gilt

$$h'(x,y) = \left(y - 2x\mathrm{e}^x\sin(x^2+y) + \mathrm{e}^x\cos(x^2+y) + 1, x - \mathrm{e}^x\sin(x^2+y)\right).$$

□

Aufgabe 42: Zeigen Sie, dass $\det : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}, A \mapsto \det(A)$ differenzierbar ist und berechnen Sie die Ableitung $\det'$.

Lösungsvorschlag: Für eine Matrix $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ führen wir die Notation $a^{(i)} = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \end{pmatrix}$ für $i = 1,2$ ein. Wir schreiben auch $A = [a^{(1)}, a^{(2)}]$.
Behauptung. Die Abbildung $\det : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}, A \mapsto \det(A)$ ist differenzierbar und es gilt

$$\det'(A)H = \det([a^{(1)}, h^{(2)}]) + \det([h^{(1)}, a^{(2)}]), \quad H = [h^{(1)}, h^{(2)}] \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

Beweis. Der Witz an der Aufgabe ist, dass die Determinante linear bezüglich jeder Spalte ist, d.h., z.B. die Abbildung $h \mapsto \det([a^{(1)}, h]) = a_{11}h_2 - a_{21}h_1$ ist eine lineare Abbildung von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}$, ebenso $h \mapsto \det([h, a^{(2)}])$.

Mit dieser Erkenntnis berechnen wir für $H = [h^{(1)}, h^{(2)}] \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

$$\begin{aligned}
r(H) &= \det(A+H) - \det(A) - \det([a^{(1)}, h^{(2)}]) - \det([h^{(1)}, a^{(2)}]) \\
&= \det([a^{(1)}, a^{(2)}]) + \det([a^{(1)}, h^{(2)}]) + \det([h^{(1)}, a^{(2)}]) + \det([h^{(1)}, h^{(2)}]) \\
&\quad - \det([a^{(1)}, a^{(2)}]) - \det([a^{(1)}, h^{(2)}]) - \det([h^{(1)}, a^{(2)}]) \\
&= \det([h^{(1)}, h^{(2)}]) \\
&= \det(H).
\end{aligned}$$

Betrachte nun die kompakte (da beschränkt und abgeschlossen) Menge $B = S_{\mathbb{R}^2}(0,1) \times S_{\mathbb{R}^2}(0,1) \subseteq \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$. Aus der Stetigkeit der Determinantenfunktion folgt, dass es ein $\alpha > 0$ gibt, sodass $\left|\det([x^{(1)}, x^{(2)}])\right| \le \alpha$ für alle $(x^{(1)}, x^{(2)}) \in B$. Daraus folgt mit der Bilinearität

$$\left|\det([h^{(1)}, h^{(2)}])\right| = \left|\det\left(\left[\frac{h^{(1)}}{\left|h^{(1)}\right|_2}, \frac{h^{(2)}}{\left|h^{(2)}\right|_2}\right]\right)\right| \left|h^{(1)}\right|_2 \left|h^{(2)}\right|_2 \le \alpha \left|h^{(1)}\right|_2 \left|h^{(2)}\right|_2.$$

— **Bitte wenden!** —

Da auf dem endlichdimensionalen Vektorraum $\mathbb{R}^{2\times 2}$ alle Normen äquivalent sind, können wir speziell die Norm $\|H\| = \left|h^{(1)}\right|_2 + \left|h^{(2)}\right|_2$ verwenden. Somit erhalten wir die Behauptung aus

$$\frac{1}{\|H\|}\,|r(H)| = \frac{1}{\|H\|}\,|\det(H)| \le \frac{\alpha\left|h^{(1)}\right|_2\left|h^{(2)}\right|_2}{\left|h^{(1)}\right|_2 + \left|h^{(2)}\right|_2} \to 0 \quad \text{für } \|H\| \to 0. \qquad \square$$

Aufgabe 43: (Präsensaufgabe)
Sei $A \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. Die Operatornorm von A ist definiert als

$$\|A\| = \sup_{\substack{u\in\mathbb{R}^n \\ |u|=1}} |Au|\,,$$

wobei $|\cdot|$ hier die euklidische Norm in $\mathbb{R}^m$ bezeichnet. Wir können A auch als $m \times n$-Matrix darstellen. Sei also $A = (a_{jk})_{\substack{1\le j\le m \\ 1\le k\le n}}$, dann ist die Hilbert-Schmidt Norm von A definiert durch

$$\|A\|_{\mathrm{H}S} := \left(\sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n |a_{jk}|^2\right)^{1/2}.$$

Zeigen Sie, dass $\|A\| \le \|A\|_{\mathrm{H}S}$ für alle $A \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$.

Lösungsvorschlag: Sei $A \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. Dann gilt per Definition der Operatornorm

$$\begin{aligned}
\|A\| = \sup_{\substack{u\in\mathbb{R}^n \\ |u|=1}} |Au| = \sup_{\substack{u\in\mathbb{R}^n \\ |u|=1}} \left(\sum_{j=1}^m \left|(Au)_j\right|^2\right)^{1/2} &= \sup_{\substack{u\in\mathbb{R}^n \\ |u|=1}} \left(\sum_{j=1}^m \Big|\sum_{k=1}^n a_{jk}u_k\Big|^2\right)^{1/2} \\
&\le \sup_{\substack{u\in\mathbb{R}^n \\ |u|=1}} \left(\sum_{j=1}^m \Big(\sum_{k=1}^n |a_{jk}|^2 \cdot \sum_{k=1}^n |u_k|^2\Big)\right)^{1/2} \\
&\le \left(\sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n |a_{jk}|^2 \cdot \sup_{\substack{u\in\mathbb{R}^n \\ |u|=1}} \sum_{k=1}^n |u_k|^2\right)^{1/2} \\
&= \left(\sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n |a_{jk}|^2 \cdot \sup_{\substack{u\in\mathbb{R}^n \\ |u|=1}} |u|^2\right)^{1/2} \\
&= \left(\sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n |a_{jk}|^2\right)^{1/2} \\
&= \|A\|_{\mathrm{H}S}
\end{aligned}$$

wobei wir in der zweiten Ungleichung verwendet haben, dass die Wurzel eine monton wachsende Funktion ist und das Supremum einer Summe kleiner ist als die Summe der einzelnen Suprema.

Erinnerung:
Die Klausur zur Vorlesung Analysis 2 findet am **17. September 2019** von **11 - 13 Uhr** statt.

Die Anmeldung zur Klausur ist ab sofort möglich. **Anmeldeschluss** ist der **01. September 2019**. Eine Anmeldung nach diesem Termin ist **NICHT** möglich.
Studenten die den Übungsschein benötigen können sich erst anmelden wenn Sie den Übungsschein bestanden haben.

Die Anmeldung erfolgt über Campus Management für Studierende.
Diese und weitere Informationen finden Sie unter

`http://www.math.kit.edu/iana3/~schmoeger/seite/termin/de`