Institut für Analysis
Prof. Dr. Dirk Hundertmark
Dr. Markus Lange

SoSe 2019
19.06.2019

Analysis 2

Aufgabenzettel 9

Abgabe bis 26. Juni 2019, 10:00 Uhr

Erinnerung: Die Anmeldung für den Übungsschein ist nun möglich. Anmeldeschluss ist der 26.07.2019. Für die Fachrichtungen Mathematik-Bachelor, Mathematik-Lehramt und Informatik ist der Übungsschein Voraussetzung für die Anmeldung zur Prüfung Analysis II.

Aufgabe 44: (K)
Sei M die Menge der invertierbaren Matrizen in $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

(i) Geben Sie einen stetigen Weg in M an, der $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ verbindet.

(ii) Zeigen Sie, dass M nicht wegzusammenhängend ist.

Lösungsvorschlag: Sei M die Menge der invertierbaren Matrizen in $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

(i) Der Weg $f : [0,1] \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ definiert durch $f(t) = \begin{pmatrix} \cos \pi t & -\sin \pi t \\ \sin \pi t & \cos \pi t \end{pmatrix}$ erfüllt $f(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $f(1) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ und ist stetig. Außerdem liegt das Bild von f in M, denn $\det f(t) = 1 \neq 0$ ist für alle $t \in [0,1]$ erfüllt.

(ii) *Behauptung.* Die Menge M ist nicht wegzusammenhängend.
Beweis. Angenommen, M wäre wegzusammenhängend. Da $\det : M \to \mathbb{R}$ stetig ist, folgt aus dem Zwischenwertsatz, dass das Bild $\det(M) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ wegzusammenhängend ist. Dies ist offensichtlich falsch, da es z.B. keinen stetige Abbildung von -1 nach 1 in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ gibt . $\square$

Bemerkung: Insbesondere gibt es keinen stetigen Weg in M, der $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ mit $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ verbindet. Ganz anders sieht die Sache aus, wenn man die Menge M der invertierbaren Matrizen in $\mathbb{C}^{2\times 2}$ betrachtet. Das obige Argument funktioniert nicht mehr, da $\det(M) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ wegzusammenhängend ist. Tatsächlich ist $[0,1] \ni t \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\pi t} \end{pmatrix} \in M$ ein stetiger Weg in M, der die beiden genannten Matrizen verbindet.

— **Bitte wenden!** —

Aufgabe 45: (K)
Sei $U \subset \mathbb{R}^3$ offen und $f = (f_1, f_2, f_3) : U \to \mathbb{R}^3$ zweimal stetig differenzierbar. Wir definieren

- die Divergenz $\mathrm{div} : U \to \mathbb{R}$ von f als

$$\mathrm{div} f := \langle \nabla, f \rangle_{\mathbb{R}^3} = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial f_j}{\partial x_j}\,,$$

- die Rotation $\mathrm{rot} : U \to \mathbb{R}^3$ von f als

$$\mathrm{rot} f := \Big(\frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3}, \frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_1}, \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \Big)\,.$$

Zeigen Sie, dass

(i) $\mathrm{rot}\,\mathrm{grad} f = 0$.

(ii) $\mathrm{div}\,\mathrm{rot} f = 0$.

Lösungsvorschlag: Sei $U \subset \mathbb{R}^3$ offen und $f = (f_1, f_2, f_3) : U \to \mathbb{R}^3$ zweimal stetig differenzierbar. Dann folgt, da f zweimal stetig differenzierbar ist, dass $\mathrm{grad} f$, $\mathrm{rot} f$ sowie $\mathrm{rot}\,\mathrm{grad} f$ und $\mathrm{div}\,\mathrm{rot} f$ existieren und wohldefiniert sind. Somit können wir diese mathematischen Ausdrücke nun einfach konkret ausrechnen.

(i) Wir beginnen mit $\mathrm{grad} f$. Per Definition des Gradienten gilt

$$\mathrm{grad} f = \nabla f = \Big(\underbrace{\frac{\partial f}{\partial x_1}}_{=(\nabla f)_1}, \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x_2}}_{=(\nabla f)_2}, \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x_3}}_{=(\nabla f)_3} \Big)\,.$$

Aus der obigen Definition der Rotation folgt nun

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{grad} f = \Big(\frac{\partial (\nabla f)_3}{\partial x_2} - \frac{\partial (\nabla f)_2}{\partial x_3}, \frac{\partial (\nabla f)_1}{\partial x_3} - \frac{\partial (\nabla f)_3}{\partial x_1}, \frac{\partial (\nabla f)_2}{\partial x_1} - \frac{\partial (\nabla f)_1}{\partial x_2} \Big)$$

Wir setzen ein was der Gradient von f ist und erhalten

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{grad} f = \Big(\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} \Big)$$

Mit dem Satz von Schwarz (Satz 13.5) folgt, da f zweimal stetig differenzierbar ist, dass

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2}\,, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}$$

Somit ist $\mathrm{rot}\,\mathrm{grad} f = 0$.

(ii) Aus der Definition der Rotation wissen wir schon wie $\operatorname{rot} f$ komponentenweise aussieht.

$$\operatorname{rot} f := \Big(\underbrace{\frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3}}_{(\operatorname{rot} f)_1}, \underbrace{\frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_1}}_{(\operatorname{rot} f)_2}, \underbrace{\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}}_{(\operatorname{rot} f)_3} \Big).$$

Aus der Definition der Divergenz folgt

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} \operatorname{rot} f = \langle \nabla, \operatorname{rot} f \rangle_{\mathbb{R}^3} &= \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial (\operatorname{rot} f)_j}{\partial x_j} \\
&= \frac{\partial (\operatorname{rot} f)_1}{\partial x_1} + \frac{\partial (\operatorname{rot} f)_2}{\partial x_2} + \frac{\partial (\operatorname{rot} f)_3}{\partial x_3} \\
&= \frac{\partial \big(\frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \big)}{\partial x_1} + \frac{\partial \big(\frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_1} \big)}{\partial x_2} + \frac{\partial \big(\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \big)}{\partial x_3} \\
&= \frac{\partial^2 f_3}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_2 \partial x_3} - \frac{\partial^2 f_3}{\partial x_2 \partial x_1} + \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_3 \partial x_1} - \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_3 \partial x_2} \\
&= \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_2 \partial x_3} - \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_3 \partial x_2} + \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_3 \partial x_1} - \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial^2 f_3}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 f_3}{\partial x_2 \partial x_1}.
\end{aligned}$$

Da f zweimal stetig differenzierbar ist, muss auch jeder der drei Komponentenfunktionen zweimal stetig differenzierbar sein. Also folgt aus dem Satz von Schwarz (Satz 13.5), dass

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial x_2 \partial x_3} = \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_3 \partial x_2}, \quad \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_3 \partial x_1} = \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1 \partial x_3} \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 f_3}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 f_3}{\partial x_2 \partial x_1}.$$

Somit ist $\operatorname{div} \operatorname{rot} f = 0$.

Viel Spaß im verbleibenden Teil der Pfingstferien

Erinnerung:
Die Klausur zur Vorlesung Analysis 2 findet am **17. September 2019** von **11 - 13 Uhr** statt.

Die Anmeldung zur Klausur ist ab sofort möglich. **Anmeldeschluss** ist der **01. September 2019**. Eine Anmeldung nach diesem Termin ist **NICHT** möglich.
Studenten die den Übungsschein benötigen können sich erst anmelden wenn Sie den Übungsschein bestanden haben.

Die Anmeldung erfolgt über Campus Management für Studierende.
Diese und weitere Informationen finden Sie unter

`http://www.math.kit.edu/iana3/~schmoeger/seite/termin/de`