

1. Übungsblatt - ANALYSIS III

Abgabe: bis Freitag, 3. November 2006, 14.00 Uhr
in den Einwurfskasten neben Zimmer 308

K 1) a) Bestimmen Sie von folgenden Anfangswertproblemen jeweils eine Lösung:

$$(i) \quad y'(x) = \frac{x + 2y}{2x + y}, \quad y(1) = 0, \quad (ii) \quad y'(x) = \frac{2}{x + 1}y(x), \quad y(0) = 2,$$

$$(iii) \quad y'(x) = \frac{x \log(y)}{\sin x}, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^e, \quad (iv) \quad y'(x) = \frac{\cos x}{\cos^2 y}, \quad y(\pi) = \frac{\pi}{4}.$$

b) Man bestimme alle auf Intervallen I definierten Lösungen $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ der Differentialgleichung

$$y'(x) = e^{y(x)} \sin x.$$

K 2) a) Man bestimme eine Lösung des Anfangswertproblems

$$y'(x) = \max\{x, y(x)\}, \quad y(0) = 0$$

auf \mathbb{R} und skizziere das Richtungsfeld der Differentialgleichung.

b) Es sei $D \subseteq \mathbb{R}^2$ offen und $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Zeigen Sie:

- (i) Ist $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Lösung von $y'(x) = f(x, y(x))$, so ist y zweimal stetig differenzierbar.
- (ii) Sind $y_1, y_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$ Lösungen von $y' = f(x, y)$, so ist auch $z = \max\{y_1, y_2\}$ eine Lösung der Differentialgleichung.

3) Es sei $f : [a, b] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und für jedes feste $x \in [a, b]$ monoton fallend in der zweiten Variablen.

Zeigen Sie: Sind $y_1, y_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Lösungen des Anfangswertproblems

$$y' = f(x, y), \quad y(a) = y_0,$$

so ist $y_1 = y_2$.

4) a) Es sei $y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar und $y'(a) < \lambda < y'(b)$ für ein $\lambda \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie: Es existiert ein $x_0 \in (a, b)$ mit $y'(x_0) = \lambda$.
Hinweis: Betrachten Sie $g(x) = y(x) - \lambda x$.

b) Es sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(y) = \begin{cases} 1 & : y \in \mathbb{Q} \\ 2 & : y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}.$$

Man zeigen mit Teil a), dass die Differentialgleichung $y'(x) = f(y(x))$ keine Lösung besitzt.

BITTE WENDEN!

Übungsblatt:

Jeden Freitag erscheint ein Übungsblatt zur schriftlichen Bearbeitung. Jeweils die zwei mit “K” gekennzeichnete Aufgaben können zur Korrektur abgegeben werden.

Die Ausgabe erfolgt vor dem Sekretariat Zi. 305.

Die bearbeiteten Aufgaben werden in die Einwurfschlitze neben Zimmer 308 geworfen. Der späteste Abgabetermin ist dem jeweiligen Übungsblatt zu entnehmen.

Die korrigierten Übungsblätter werden in die Kästen gegenüber Zimmer 302 gelegt und können dort abgeholt werden.

Übungsschein:

Jede K-Aufgabe wird mit maximal 4 Punkten bewertet. Für den Übungsschein reichen jeweils 20 Punkte der ersten und zweiten fünf Übungsblätter sowie die Hälfte der Punkte der restlichen Übungsblätter aus.

Literatur zur Vorlesung:

P. Hartmann, *Ordinary Differential Equations*, Wiley.

H. Heuser, *Lehrbuch der Analysis, Teil 2*, Teubner-Verlag.

H. Heuser, *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, Teubner-Verlag.

W. Walter, *Analysis II*, Springer.

W. Walter, *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, 7. Auflage, Teubner-Verlag.