Universität Karlsruhe
Institut für Analysis
Prof. Dr. M. von Renteln
Dipl.-Phys. V. Hoang

WS 2006/2007

10. Übungsblatt - ANALYSIS III

Abgabe: bis Freitag, 19. Januar 2007, 14.00 Uhr
in den Einwurfkasten neben Zimmer 308

K 37) Lösen Sie für $\alpha \in \mathbb{R}$ die Anfangswertaufgabe

$$(1+x)y' - \alpha y = 0, \quad y(0) = 1$$

mittels Potenzreihenansatz auf dem Intervall $(-1,1)$ und beweisen Sie damit die Binomialentwicklung

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k \quad (x \in (-1,1)).$$

(NEWTON 1665) Hierbei ist für $\alpha \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{N}$:

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!}$$
$$\binom{\alpha}{0} = 1.$$

K 38) Machen Sie für die Differentialgleichung

$$y'' + (\sin x)y = e^{x^2}$$

einen Potenzreihenansatz der Form $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ und bestimmen Sie die Koeffizienten c_2, c_3 und c_4 in Abhängigkeit von c_0 und c_1.

39) Es sei $s(x) = b_0 + \ldots + b_m x^m$ ein Polynom. Zeigen Sie: die inhomogene Differentialgleichung

$$(\,*\,) \qquad y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_0 y = s$$

mit konstanten Koeffizienten besitzt stets eine Lösung der Form

$$y(x) = \begin{cases} Q(x) & : \quad p(0) \neq 0 \\ x^\nu Q(x) & : \quad 0 \text{ ist eine } \nu\text{-fache Nullstelle von } p. \end{cases}$$

mit einem Polynom Q vom Grad m. Hierbei sei p das charakteristische Polynom von $(*)$.

40) Es sei $f \in C^\infty(I)$ für ein offenes, nichtleeres Intervall $I \subset \mathbb{R}$. f heiße analytisch auf I, falls für jedes $x_0 \in I$ ein $\delta > 0$ existiert, sodass f auf $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset I$ als Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (t - x_0)^n$ dargestellt werden kann.
Zeigen Sie: f ist genau dann analytisch auf I, wenn es für jedes $x_0 \in I$ eine Umgebung $J \ni x_0$ und Konstanten $C > 0,\ R > 0$ gibt mit

$$|f^{(j)}(x)| \leq C \frac{j!}{R^j} \quad (x \in J,\ j \in \mathbb{N}_0).$$